РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Вычислительный Центр

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $W^1_{p,q}(I)$ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

Д.В. Прохоров

Препринт 2018/230

Хабаровск 2018

Вычислительный центр ДВО РАН
ул. Ким Ю Чена, 65, г. Хабаровск 680000
Тел./Факс: (4212)227469

УДК 517.51

Прохоров Д.В. Некоторые свойства весового пространства Соболева $W^1_{p,q}(I)$ на вещественной прямой. Препринт 2018/230. Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2018, 36 с.

В работе изложены полные доказательства известных результатов для весового пространства Соболева первого порядка на вещественной прямой. Сформулированы и доказаны некоторые новые результаты.

Библиография — 8 наименований.
Ответственный редактор — д.ф.-м.н. Е.П. Ушакова.

UDC 517.51

Prokhorov D.V. Some properties of weighted Sobolev space $W^1_{p,q}(I)$ on real line. Research Report 2018/230. Khabarovsk: Computing Center FEB RAS, 2018, 36 p.

The paper contains complete proofs of the known results for the first-order weighted Sobolev space on the real line. Some new results are obtained.

Некоторые свойства весового пространства Соболева $W^1_{p,q}(I)$ на вещественной прямой

Д.В. Прохоров

1. Определение $W^1_{p,q}(I)$

Результаты данного раздела содержатся (частично без доказательства) в работе [7].

1.1. Определение. Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^1$ обозначает меру Лебега на вещественной прямой, $\mathfrak{M}(I)$ — пространство измеримых по Лебегу на I функций $f : I \mapsto [-\infty, \infty]$, $\mathfrak{M}^+(I)$ — класс неотрицательных измеримых по Лебегу на I функций, $0 < p, q \leq \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$. Обозначим через $W^1_{p,q}(I)$ пространство всех функций $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, имеющих обобщенную производную $Du \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ и у которых

$$\|u\|_{W^1_{p,q}(I)} := \|\rho Du\|_{L^p(I)} + \|vu\|_{L^q(I)} < \infty.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ обозначим замыкание множества

$$\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) := \{f \in AC_{\mathrm{loc}}(I) \bigcap W^1_{p,q}(I) : \operatorname{supp} f \text{ компакт в } I\}$$

в $W^1_{p,q}(I)$.

1.2. Лемма. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$. Функция u принадлежит $W^1_{p,q}(I)$ тогда и только тогда, когда она имеет представление $\bar{u}$ такое, что $\bar{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|\rho\bar{u}'\|_{L^p(I)} + \|v\bar{u}\|_{L^q(I)} < \infty$.*

Доказательство. Пусть u допускает представление $\bar{u} : I \to \mathbb{R}$ такое, что $\bar{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ и $\|\rho\bar{u}'\|_{L^p(I)} + \|v\bar{u}\|_{L^q(I)} < \infty$. Применяя [4, Corollary 3.37, page 89], получим

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I \bar{u}\,'\varphi$$

для любой $\varphi \in C^1_0(I)$. Таким образом, $\bar{u}' = Du$ и, следовательно, $u \in W^1_{p,q}(I)$.

Обратно, предположим, что $u \in W^1_{p,q}(I)$. Фиксируем произвольную точку Лебега $x_0 \in I$ функции u. Положим

$$\bar{u}(x) := u(x_0) + \int_{x_0}^{x} (Du)(t)\,dt, \quad x \in I,$$

определив, тем самым, функцию $\bar{u} : I \to \mathbb{R}$. Применяя [4, Lemma 3.31, page 85] к произвольному отрезку $[\alpha, \beta] \subset I$, содержащему точку x_0, получим, что $\bar{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ и $\bar{u}'(x) = Du(x)$ для $\mathcal{L}^1$-п.в. $x \in I$. В силу [4, Corollary 3.37, page 89], имеем

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I \bar{u}'\varphi = -\int_I Du \cdot \varphi = \int_I u\varphi'$$

для любой $\varphi \in C_0^1(I)$. Откуда

$$\int_I (u - \bar{u})\varphi' = 0$$

для любой $\varphi \in C_0^1(I)$. По [4, Lemma 7.3, page 216] $u - \bar{u}$ константа $\mathcal{L}^1$-п.в. на I. Так как x_0 точка Лебега u, $\bar{u}$ непрерывна в x_0 и $u(x_0) = \bar{u}(x_0)$, то $u = \bar{u}$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, и, следовательно, $\bar{u}$ суть представление u. $\square$

1.3. Лемма. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $u \in W^1_{p,q}(I)$. Тогда $|u| \in W^1_{p,q}(I)$, $\|u\|_{W^1_{p,q}(I)} = \||u|\|_{W^1_{p,q}(I)}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную $u \in W^1_{p,q}(I)$. По лемме 1.2 существует представление $\bar{u}$ функции u такое, что $\bar{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|\rho\bar{u}'\|_{L^p(I)} + \|v\bar{u}\|_{L^q(I)} < \infty$. Из неравенства треугольника и определения $AC_{\mathrm{loc}}(I)$ следует, что $|\bar{u}| \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$. Положим

$$E := \{x \in I : \exists \bar{u}'(x), \exists |\bar{u}|'(x)\}.$$

Так как $\bar{u}, |\bar{u}| \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, то $\mathcal{L}^1(I \setminus E) = 0$. Положим

$$h(x) := \begin{cases} \operatorname{sign}(\bar{u}(x)) \cdot \bar{u}'(x), & x \in E, \\ 0, & x \in I \setminus E. \end{cases}$$

Функция h измерима по Лебегу, ибо $\operatorname{sign} \circ \bar{u}$ борелевская. Заметим, также, что $\rho h \in L^p(I)$, в силу $\rho\bar{u}' \in L^p(I)$. Фиксируем произвольную $x \in E$.

Пусть $\bar{u}(x) = 0$. Имеем

$$|\bar{u}|'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{|\bar{u}(x+t)|}{t}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{|\bar{u}(x+t)|}{t} = |\bar{u}'(x)|, \quad \lim_{t \to 0-0} \frac{|\bar{u}(x+t)|}{t} = -|\bar{u}'(x)|.$$

Откуда $|\bar{u}|'(x) = 0 = h(x)$.

Пусть $\bar{u}(x) \neq 0$. Тогда из непрерывности $\bar{u}$ в точке x существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{sign}(\bar{u}(x)) = \operatorname{sign}(\bar{u}(x+t))$ для $|t| < \delta$. Следовательно,

$$|\bar{u}|'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{|\bar{u}(x+t)| - |\bar{u}(x)|}{t} = \operatorname{sign}(\bar{u}(x)) \lim_{t\to 0} \frac{\bar{u}(x+t) - \bar{u}(x)}{t} = h(x).$$

Таким образом, $\|\rho|\bar{u}|'\|_{L^p(I)} + \|v|\bar{u}|\|_{L^q(I)} < \infty$. Учитывая, что $|\bar{u}|$ есть представление $|u|$, имеем $|u| \in W^1_{p,q}(I)$ в силу леммы 1.2, и $\|u\|_{W^1_{p,q}(I)} = \||u|\|_{W^1_{p,q}(I)}$. $\square$

1.4. Следствие. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $0 < p, q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$. Тогда $|u| \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, $\|u\|_{W^1_{p,q}(I)} = \||u|\|_{W^1_{p,q}(I)}$.*

Доказательство. Если $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, то существует последовательность $\{u_n\}_1^\infty \subset W^1_{p,q}(I)$ функций, имеющих компактный носитель, такая, что $\|u - u_n\|_{W^1_{p,q}(I)} \to 0$ при $n \to \infty$. По доказанному, $\{|u_n|\}_1^\infty \subset W^1_{p,q}(I)$, каждая $|u_n|$ имеет компактный носитель, и $\||u| - |u_n|\|_{W^1_{p,q}(I)} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

1.5. Лемма. *Пусть $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, $\bar{u}$ есть представление u, о существовании которого говорится в лемме 1.2. Тогда*

1. *Если существует $e \in I$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))}\|v\|_{L^q((a,e))} \in (0,\infty)$, то $\bar{u}(a+0) = 0$.*
2. *Если существует $e \in I$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((e,b))}\|v\|_{L^q((e,b))} \in (0,\infty)$, то $\bar{u}(b-0) = 0$.*

Доказательство. Для $\phi \in AC_{\mathrm{loc}}(I)\bigcap W^1_{p,q}(I)$ и $t, x \in I_0 \subset I$ имеем

$$|\phi(x)| \le \left|\int_t^x |\phi'|\right| + |\phi(t)| \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)}\|\rho\phi'\|_{L^p(I_0)} + |\phi(t)|. \tag{1}$$

Домножая неравенство (1) на $v(t)$ и интегрируя со степенью q по t вдоль промежутка I_0, получим

$$|\phi(x)|\|v\|_{L^q(I_0)} \le c(q)\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)}\|\rho\phi'\|_{L^p(I_0)}\|v\|_{L^q(I_0)} + \|v\phi\|_{L^q(I_0)}, \quad x \in I_0. \tag{2}$$

При $0 < \|v\|_{L^q(I_0)} < \infty$ из (2) вытекает

$$\sup_{x\in I_0} |\phi(x)| \le c(q)\left(\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} + \|v\|^{-1}_{L^q(I_0)}\right)\|\phi\|_{W^1_{p,q}(I_0)}. \tag{3}$$

Фиксируем $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$.

1. Пусть существует $e \in I$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))}\|v\|_{L^q((a,e))} \in (0,\infty)$. Тогда $(\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))} + \|v\|^{-1}_{L^q((a,e))}) \in (0,\infty)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, то существует $\varphi \in AC_{\rm loc}(I)\bigcap W^1_{p,q}(I)$ с компактным носителем такая, что

$$\|u-\varphi\|_{W^1_{p,q}(I)} < \varepsilon\, c(q)^{-1}\left(\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))} + \|v\|^{-1}_{L^q((a,e))}\right)^{-1}.$$

Выберем $\alpha \in (a,e)$ так, чтобы $(a,\alpha)\cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing$. Тогда для $x \in (a,\alpha)$ в силу (3) выполнено

$$|\bar u(x)| = |\bar u(x) - \varphi(x)| \le c(q)\left(\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))} + \|v\|^{-1}_{L^q((a,e))}\right)\|u-\varphi\|_{W^1_{p,q}(I)} < \varepsilon,$$

то есть $\bar u(a+0) = 0$.

Аналогично, доказывается пункт 2. $\square$

Имеет место следующий аналог утверждения [3, Lemma 2.6].

1.6. Лемма. *Пусть X — действительное векторное пространство функций на пространстве с мерой $f\colon \Omega_X \to [-\infty,\infty]$ и, аналогично, Y действительное векторное пространство функций $f\colon \Omega_Y \to [-\infty,\infty]$; $\|\cdot\|_X\colon X \to [0,\infty)$ и $\|\cdot\|_Y\colon Y \to [0,\infty)$ — (квази)полунормы; оператор $T : X \to Y$, $c \ge 1$. Предположим, что X, Y, T, $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $f \in X \quad\Rightarrow\quad |f| \in X \;\&\; \|f\|_X = \||f|\|_X,$
2) $f \in X \;\&\; \alpha > 0 \quad\Rightarrow\quad T(\alpha f) = \alpha T f,$
3) $f_1, f_2 \in X \;\&\; (0 \le f_1(t) \le f_2(t),\ t \in \Omega_X) \quad\Rightarrow\quad \|Tf_1\|_Y \le \|Tf_2\|_Y,$
4) $f \in X \quad\Rightarrow\quad \|Tf\|_Y \le \|T(|f|)\|_Y,$
5) $f \in X \;\&\; \|f\|_X = 0 \quad\Rightarrow\quad \|Tf\|_Y = 0,$
6) $(0 \le f_n \in X,\ \|f_n\|_X = 1,\ n \in \mathbb{N}) \;\&\; \left[f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} f_n(t),\ t \in \Omega_X\right]$

$\Rightarrow\quad f \in X.$

Тогда существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X, \qquad f \in X.$$

Доказательство. Предположим противное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $h_n \in X$ такая, что

$$\|Th_n\|_Y > n^3 c^n \|h_n\|_X.$$

Заметим, что $\|h_n\|_X \neq 0$ в силу свойства 5). Положим $f_n := |h_n|/\|h_n\|_X$, $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} f_n(t)$, $t \in \Omega_X$. Из 1) и 6) следует, что $f \in X$. С другой стороны, по условиям 3), 2) и 4)

$$\|Tf\|_Y \geq \|T(n^{-2}c^{-n} f_n)\|_Y = \frac{1}{n^2 c^n \|h_n\|_X} \|T(|h_n|)\|_Y > n$$

для любых $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\|Tf\|_Y = \infty$, и мы приходим к противоречию. $\square$

1.7. Теорема. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. Для конечности супремума*

$$\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) := \sup_{f \in W^1_{p,q}(I)} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой $f \in W^1_{p,q}(I)$ выполнялось $\int_I |fg| < \infty$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$ влечет $\int_I |fg| < \infty$. Обратно, пусть для любой $f \in W^1_{p,q}(I)$ выполнено $\int_I |fg| < \infty$. Положим

$$X := W^1_{p,q}(I),\ Y := L^1(I),\ \|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{W^1_{p,q}(I)},\ \|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_{L^1(I)},$$

$$Tf = fg,\ c = \max\{1, 2^{\frac{1}{q}-1}\}.$$

Следовательно, $T\colon X \to Y$. Кроме этого, условия 2)–4) леммы 1.6 выполняются. Условие 1) леммы 1.6 следует из леммы 1.3.

Так как $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, то $\rho > 0$ п.в. на I. Пусть $\|f\|_{W^1_{p,q}(I)} = 0$. Тогда $Df = 0$, т.е. $f = \mathrm{const}$ п.в. на I. Более того, $\|fv\|_{L^q(I)} = 0$. Следовательно, $f = 0$ п.в. на I и $\|Tf\|_Y = 0$. Таким образом, условие 5) леммы 1.6 выполнено.

Далее, проверим условие 6) леммы 1.6. Фиксируем последовательность $\{f_n\} \subset X$ неотрицательных функций с условием $\|f_n\|_X = 1$. Пусть

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} f_n(t), \qquad t \in I.$$

Обозначим через $\bar{f}_n$ представление f_n, существующее по лемме 1.2. Положим

$$\tilde{f}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, \bar{f}_n(t), \qquad t \in I.$$

Заметим, что $f = \tilde{f}$ п.в. на I. Кроме того, существует точка $t_0 \in I$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\bar{f}_n(t_0)| < \infty.$$

В противном случае (здесь используем $\|v\|_{L^1(I)} > 0$)

$$\infty = \Big\| v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\bar{f}_n| \Big\|_{L^q(I)} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \|v \bar{f}_n\|_{L^q(I)} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Так как для произвольного отрезка $[d,e] \subset I$, содержащего t_0, мы имеем (неравенство Гельдера $1 \le p \le \infty$)

$$\begin{aligned}
&\int_d^e \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\bar{f}_n(t)| \Big)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_d^e |\bar{f}_n(t)|\, dt \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_d^e \Big(\Big| \int_{t_0}^{t} |Df_n| \Big| + |\bar{f}_n(t_0)| \Big)\, dt \\
&\le (e-d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \Big(\|\rho D f_n\|_{L^p([d,e])} \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}([d,e])} + |\bar{f}_n(t_0)| \Big) < \infty,
\end{aligned}$$

то $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Далее, для произвольного $[d,e] \subset I$ выполнена оценка

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, \|D f_n\|_{L^1([d,e])} &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \|\rho D f_n\|_{L^p([d,e])} \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}([d,e])} \\
&\le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}([d,e])} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.
\end{aligned}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} D f_n(t)$ сходится для п.в. $t \in I$. Положим

$$E := \Big\{ t \in I : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, D f_n(t) \text{ сходится} \Big\},$$

$$h(t) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, D f_n(t), & t \in E, \\ 0, & t \in I \setminus E. \end{cases}$$

Заметим, что $h \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Фиксируем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Пусть отрезок $[d,e] \subset I$ такой, что $t_0 \in (d,e)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset (d,e)$. Для $k \in \mathbb{N}$, $t \in I$ имеем

$$\Big|\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2 c^n}\, \varphi(t) Df_n(t)\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\varphi(t) Df_n(t)|,$$

$$\Big|\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2 c^n}\, \varphi'(t) \bar f_n(t)\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\varphi'(t) \bar f_n(t)|.$$

Тогда

$$\int_I \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\varphi(t) Df_n(t)|\Big)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_I |\varphi(t) Df_n(t)|\, dt$$
$$\le \|\varphi\|_{L^\infty(I)} \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}([d,e])} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$

и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует

$$\int_I \varphi h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_I \varphi Df_n.$$

Так как

$$\int_I \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n}\, |\varphi'(t) \bar f_n(t)|\Big)\, dt$$
$$\le \|\varphi'\|_{L^\infty(I)} (d-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \left(\|Df_n\|_{L^1([d,e])} + |\bar f_n(t_0)|\right) < \infty,$$

то снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\int_I \varphi' f = \int_I \varphi' \tilde f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_I \varphi' \bar f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_I \varphi' f_n$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} \int_I \varphi Df_n = -\int_I \varphi h.$$

Таким образом, f имеет обобщенную производную, $Df = h$ и

$$\|\rho Df\|_{L^p(I)} + \|vf\|_{L^q(I)} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \left(\|\rho Df_n\|_{L^p(I)} + \|vf_n\|_{L^q(I)}\right) < \infty,$$

т.е. $f \in X$.

Утверждение теоремы следует из леммы 1.6. $\square$

1.8. Теорема. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Для конечности супремума*

$$\mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g) := \sup_{f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ *выполнялось* $\int_I |fg| < \infty$.

Доказательство. Пусть для любой $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ выполнено $\int_I |fg| < \infty$. Положим $X := \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, $Y := L^1(I)$, $Tf := fg$, $c := \max\{1, 2^{\frac{1}{q}-1}\}$. Тогда $T : X \to Y$ и условия 2)–4) леммы 1.6 выполнены. Условие 1) леммы 1.6 следует из следствия 1.4, условие 5) леммы 1.6 доказано в теореме 1.7.

Докажем справедливость условия 6) леммы 1.6. Фиксируем последовательность $\{f_n\} \subset X$ неотрицательных функций с $\|f_n\|_X = 1$. Пусть $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 c^n} f_n(t)$, $t \in I$. Как показано в теореме 1.7, $f \in W^1_{p,q}(I)$ и $\|f - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2 c^n} f_n\|_{W^1_{p,q}(I)} \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\{f_n\} \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$.

Утверждение теоремы следует из леммы 1.6. □

1.9. Следствие. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $X \in \{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I), W^1_{p,q}(I)\}$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Тогда* $\mathbf{J}_X(g) < \infty \Leftrightarrow J_X(g) < \infty$, *где*

$$J_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}}.$$

Кроме того, $\mathbf{J}_X(g) = J_X(|g|)$.

1.10. Следствие. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $X \in \{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I), \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I), W^1_{p,q}(I)\}$, $g \in \mathfrak{M}(I)$, $J_X(g) < \infty$. *Тогда* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.

Доказательство. Так как $J_X(g) < \infty$, то для любого $f \in X$ выполнено $\int_I |fg| < \infty$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in I$ такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$.

Положим

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}(x) := \begin{cases} \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho^{-p'}\right)^{-1} \int_{\alpha_1}^{x} \rho^{-p'}, & x \in (\alpha_1, \alpha_2), \\ 1, & x \in [\alpha_2, \beta_2], \\ \left(\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right)^{-1} \int_{x}^{\beta_1} \rho^{-p'}, & x \in (\beta_2, \beta_1), \\ 0, & x \in I \setminus (\alpha_1, \beta_1). \end{cases} \tag{4}$$

Тогда $\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} \in X$ и, следовательно, $\int_{\alpha_2}^{\beta_2} |g| \le \int_I |\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} g| < \infty$. $\square$

1.11. Замечание. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $0 < p, q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$. Для того, чтобы $C_0^1(I)$ содержалось в $W^1_{p,q}(I)$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$ и $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$.

2. Схема Ойнарова – Отелбаева

В данном разделе дано аккуратное доказательство свойств объектов, конструируемых схемой, разработанной в статьях [5, 1]. При этом использованы материалы препринта [2], первый параграф которого посвящен описанию этой схемы. Показано, что свойства объектов сохраняются, если условие “$\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$” заменить на “$\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I”. Это позволяет применять схему к пространствам $W^1_{p,q}(I)$, не содержащим $C_0^1(I)$ (см. замечание 1.11).

2.1. Определение. Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $\rho \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$. Заметим, что для любого промежутка $I' \subset I$, $\mathcal{L}^1(I') > 0$, выполнено $\int_{I'} \rho^{-p'} > 0$. Положим (в отличие от оригинального определения [5], $d > 0$ заменили на $d \ge 0$, в результате единственное изменение $\delta(x, 0) = 0$, вместо $\delta(x, 0) = -\infty$)

$$\delta(x, y) := \sup\left\{ d \ge 0 : \int_{x-d}^{x} \rho^{-p'} \le \int_{x}^{x+y} \rho^{-p'}, (x - d, x] \subset I \right\}$$

для $(x, y) \in D := \{(x', y') \in I \times [0, \infty] : [x', x' + y') \subset I\}$. Далее, для $x \in I$ обозначим $D_x := \{y \in [0, \infty) : x + y \in I, (5) \text{ выполнено}\}$, где

$$\int_{x-\delta(x,y)}^{x} \rho^{-p'} = \int_{x}^{x+y} \rho^{-p'}. \tag{5}$$

2.2. Лемма. *Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $\rho \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$.*

#1. $(x,y) \in D \ \Leftrightarrow\ (x \in (a,b),\, y \in [0, b-x])$. $\delta(x,0) = 0$. Если $0 < y \le b - x$, то $0 < \delta(x,y) \le x - a$. Если $(x,y) \in D$ и $\int_a^x \rho^{-p'} \ge \int_x^{x+y} \rho^{-p'}$, то выполнено (5).

#2. Пусть $x \in I$. $D_x \subset [0, b-x)$, D_x связное множество, $\sup D_x > 0$. Если $\sup D_x < b - x$, то $D_x = [0, \sup D_x]$ и $x - \delta(x, \sup D_x) = a$. Если $\sup D_x = b - x$, то $D_x = [0, \sup D_x)$. Для пары $x \in I$, $y \in [0, \sup D_x]$ определено выражение $\delta(x,y)$ и имеет место равенство (5).

#3. Пусть $x \in I$. Для $y_1, y_2 \in [0, \sup D_x]$ таких, что $y_1 < y_2$ выполнено $\delta(x,y_1) < \delta(x,y_2)$, $\delta(x, y_1+0) = \delta(x,y_1)$, $\delta(x, y_2-0) = \delta(x,y_2)$.

Доказательство. #1. Прямое следствие определения D и δ.

#2. Фиксируем $x \in I$. По определению $D_x \subset [0, b-x)$. Так как $(x - \delta(x,0), x) = \varnothing$, то $0 \in D_x$. D_x связное множество, ибо для любого $y_0 \in D_x$ и любого $y \in (0, y_0)$ имеем

$$\int_x^{x+y} \rho^{-p'} < \int_x^{x+y_0} \rho^{-p'} = \int_{x-\delta(x,y_0)}^{x} \rho^{-p'} \le \int_a^x \rho^{-p'},$$

а, следовательно, выполнено равенство (5), то есть $y \in D_x$. Далее, $\sup D_x > 0$, ибо в противном случае для любого $y > 0$ выполнено $\int_a^x \rho^{-p'} < \int_x^{x+y} \rho^{-p'}$ и, следовательно, $\int_a^x \rho^{-p'} = 0$.

Пусть $y_0 := \sup D_x < b - x$. Если $y_0 \notin D_x$, то $\int_a^x \rho^{-p'} < \int_x^{x+y_0} \rho^{-p'}$, и, следовательно, существует $y \in (0, y_0)$ такой, что $\int_a^x \rho^{-p'} < \int_x^{x+y} \rho^{-p'}$. Это противоречит тому, что D_x промежуток и $y_0 = \sup D_x$. Таким образом, в этом случае $D_x = [0, \sup D_x]$ и $x - \delta(x, \sup D_x) = a$.

Пусть $\sup D_x = b - x$. Тогда $x + \sup D_x = b \notin I$ и, следовательно, $D_x = [0, \sup D_x) = [0, b-x)$. Однако $\int_a^x \rho^{-p'} \ge \int_x^b \rho^{-p'}$, ибо в противном случае существует $y \in (0, b-x)$ такой, что $\int_a^x \rho^{-p'} < \int_x^{x+y} \rho^{-p'}$. Это противоречит тому, что D_x промежуток и $\sup D_x = b - x$.

Во всех случаях, $[0, \sup D_x] \subset [0, b-x]$ и, следовательно, $\delta(x,y)$ определено для пары $x \in I$, $y \in [0, \sup D_x]$. Кроме того, для любого $y \in [0, \sup D_x]$ имеет место равенство (5).

#3. Фиксируем $x \in I$. Пусть $y_1, y_2 \in (0, \sup D_x]$ такие, что $y_1 < y_2$. Имеем $0 < \delta(x,y_1) < \delta(x,y_2)$ в силу

$$\int_{x-\delta(x,y_1)}^{x} \rho^{-p'} = \int_x^{x+y_1} \rho^{-p'} < \int_x^{x+y_2} \rho^{-p'} = \int_{x-\delta(x,y_2)}^{x} \rho^{-p'}.$$

Из монотонности функции $y \mapsto \delta(x,y)$ на $(0, \sup D_x]$ вытекает существование односторонних пределов $\delta(x, y_1+0)$ и $\delta(x, y_2-0)$.

Для $y_1 < y \in D_x$ имеем

$$\int_{x-\delta(x,y_1+0)}^{x} \rho^{-p'} = \lim_{y\to y_1+0} \int_{x-\delta(x,y_1)}^{x} \rho^{-p'} = \lim_{y\to y_1+0} \int_{x}^{x+y} \rho^{-p'}$$
$$= \int_{x}^{x+y_1} \rho^{-p'} = \int_{x-\delta(x,y_1)}^{x} \rho^{-p'}.$$

Откуда $\delta(x, y_1 + 0) = \delta(x, y_1)$.

Аналогично,

$$\int_{x-\delta(x,y_2-0)}^{x} \rho^{-p'} = \lim_{y\to y_2-0} \int_{x-\delta(x,y)}^{x} \rho^{-p'} = \lim_{y\to y_2-0} \int_{x}^{x+y} \rho^{-p'}$$
$$= \int_{x}^{x+y_2} \rho^{-p'} = \int_{x-\delta(x,y_2)}^{x} \rho^{-p'}.$$

Откуда $\delta(x, y_2 - 0) = \delta(x, y_2)$. $\square$

2.3. Определение. Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. Для $x \in I$ положим

$$\tilde{D}_x := \{y \in D_x : \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))} \|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \le 1\},$$

$d^+(x) := \sup \tilde{D}_x$, $d^-(x) := \delta(x, d^+(x))$, $\mu^-(x) := x^- := x - d^-(x)$, $\mu^+(x) := x^+ := x + d^+(x)$, $\Delta^+(x) := [x, x^+]$, $\Delta^-(x) := [x^-, x]$, $\Delta(x) := [x^-, x^+]$.

2.4. Лемма. *Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. Пусть $x \in I$. Множество $\tilde{D}_x$ связное, $d^-(x)$ корректно определено, $d^+(x) > 0$, $d^-(x) > 0$, $a \le x^- < x < x^+ \le b$, $[0, d^+(x)) \subset \tilde{D}_x$; $d^+(x) \in \tilde{D}_x \Leftrightarrow d^+(x) \ne b - x$. Выполнено*

$$\int_{\Delta^-(x)} \rho^{-p'} = \int_{\Delta^+(x)} \rho^{-p'}, \tag{6}$$

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} \le 1. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $0 \in D_x$ и $(x - \delta(x, 0), x + 0) = \varnothing$, то $0 \in \tilde{D}_x$ и $d^+(x) \ge 0$. Кроме того, $d^+(x) \le \sup D_x \le b - x$. Поэтому $d^-(x)$ корректно определено. Так как при $y \to +0$ выполнено $\delta(x, y) \downarrow 0$ и, учитывая локальную суммируемость с нужными степенями функций $\frac{1}{\rho}, v$, находим, что $d^+(x) > 0$. Откуда $d^-(x) > 0$ и $a \le x^- < x < x^+ \le b$.

Множество $\tilde{D}_x$ связное, ибо для любого $y_0 \in \tilde{D}_x$ и $y \in [0, y_0)$ выполнено $y \in D_x$ и

$$\begin{aligned}&\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))}\,\|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))}\\&\le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y_0),x+y_0))}\,\|v\|_{L^q((x-\delta(x,y_0),x+y_0))} \le 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $[0, d^+(x)) \subset \tilde{D}_x$, и имеет место (7). Кроме того, $d^+(x) \in \tilde{D}_x$ $\Leftrightarrow d^+(x) \ne b - x$, ибо

1. $d^+(x) \in \tilde{D}_x \Rightarrow d^+(x) \in D_x \Rightarrow d^+(x) < b - x$.

2. Пусть $d^+(x) \ne b - x$, то есть $d^+(x) = \sup \tilde{D}_x < b - x$. Если $\sup D_x < b - x$, то $d^+(x) \in [0, \sup D_x] = D_x$. Если $\sup D_x = b - x$, то $d^+(x) \in [0, \sup D_x) = D_x$. Учитывая неравенство $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))}\,\|v\|_{L^q(\Delta(x))} \le 1$, имеем $d^+(x) \in \tilde{D}_x$.

Так как для любого $y \in [0, \sup D_x]$ выполнено (5) и $d^+(x) \in [0, \sup D_x]$, то выполнено (6). $\square$

2.5. Определение. Обозначим $a_0 := \inf\{x \in I : x - d^-(x) > a\}$, $b_0 := \sup\{x \in I : x + d^+(x) < b\}$. Пусть $e \in (a, b)$ такая, что $\|v\|_{L^q((a,e))} > 0$ и $\|v\|_{L^q((e,b))} > 0$. Положим

$$h_a := \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,e))}\,\|v\|_{L^q((a,e))}, \quad h_b := \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((e,b))}\,\|v\|_{L^q((e,b))}.$$

2.6. Лемма. *Пусть $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. Имеют место соотношения $a < b_0 \le b$, $a \le a_0 < b$, $a_0 \le b_0$, $x^+ < b$ для любого $x \in (a, b_0)$, $x^- > a$ для любого $x \in (a_0, b)$. Кроме того, $b_0 < b \Leftrightarrow h_b < \infty$; $a < a_0 \Leftrightarrow h_a < \infty$.*

Пусть $q < \infty$. Тогда

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))}\,\|v\|_{L^q(\Delta(x))} = 1, \quad x \in (a_0, b_0). \tag{8}$$

Доказательство. Если $\{x \in I : x + d^+(x) < b\} \ne \varnothing$, то $a < b_0 \le b$. Пусть $\{x \in I : x + d^+(x) < b\} = \varnothing$, то есть для любого $x \in I$ выполнено $x + d^+(x) = b$, и $b_0 = -\infty$. Тогда для любого $x \in I$ выполнено $\sup D_x = b - x$. Следовательно, для любого $x \in I$ выполнено $\int_a^x \rho^{-p'} \ge \int_x^b \rho^{-p'}$. Откуда $\int_a^x \rho^{-p'} = \infty$, $x \in I$. Тогда $h_a = \infty$, и существует $c \in (a, e)$ такая, что

$\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((c,e))}\,\|v\|_{L^q((c,e))} > 2$. Заметим, что $d^+(c) = b-c$ и, следовательно, существует $y \in (e-c, b-c)$ такое, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((c-\delta(c,y),c+y))}\,\|v\|_{L^q((c-\delta(c,y),c+y))} \leq 1$. Получили противоречие. Таким образом, $a < b_0 \leq b$.

Если $\{x \in I : x - d^-(x) > a\} \neq \varnothing$, то $a \leq a_0 < b$. Пусть для любого $x \in I$ выполнено $x - d^-(x) = a$, то есть $a_0 = \infty$. Тогда для любого $x \in I$ по определению $\delta(x, d^+(x))$ выполнено $\int_a^x \rho^{-p'} = \int_x^{x+d^+(x)} \rho^{-p'} \leq \int_x^b \rho^{-p'}$. Откуда $\int_x^b \rho^{-p'} = \infty$, $x \in I$. Тогда $h_b = \infty$, и существует $c \in (e, b)$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((e,c))}\,\|v\|_{L^q((e,c))} > 2$. Заметим, что $c - d^-(c) = a$ и, так как при $y \to d^+(c) - 0$ выполнено $\delta(c,y) \uparrow d^-(c)$, то существует $y \in (0, d^+(c))$ такое, что $c - \delta(c,y) < e$ и $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((c-\delta(c,y),c+y))}\,\|v\|_{L^q((c-\delta(c,y),c+y))} \leq 1$. Получили противоречие. Таким образом, $a \leq a_0 < b$.

Предположим, что $b_0 < a_0$. Тогда существуют две точки $x_1, x_2 \in (b_0, a_0)$. Пусть, для определенности, $x_1 < x_2$. Имеем

$$\int_{\Delta^-(x_1)} \rho^{-p'} = \int_a^{x_1} \rho^{-p'} < \int_a^{x_2} \rho^{-p'} = \int_{x_2}^b \rho^{-p'} < \int_{x_1}^b \rho^{-p'} = \int_{\Delta^+(x_1)} \rho^{-p'}.$$

Получили противоречие с (6).

Напомним, что для любого $x \in (a,b)$ выполнено (7). Фиксируем $x \in (a, b_0)$. Из определения b_0 вытекает существование числа $x_2 \in (x, b_0)$ такого, что $x_2^+ < b$. Предположим, что $x^+ = b$. Тогда $d^+(x) = b - x = \sup D_x$ и

$$\int_{x_2}^b \rho^{-p'} < \int_x^b \rho^{-p'} \leq \int_a^x \rho^{-p'} < \int_a^{x_2} \rho^{-p'}.$$

Откуда $\sup D_{x_2} = b - x_2 > d^+(x_2)$. Кроме того, оценка

$$\int_{x^-}^x \rho^{-p'} = \int_x^b \rho^{-p'} > \int_{x_2}^{x_2^+} \rho^{-p'} = \int_{x_2^-}^{x_2} \rho^{-p'} > \int_{x_2^-}^x \rho^{-p'}$$

влечет $x^- < x_2^-$. Выберем $y \in (d^+(x_2), \sup D_{x_2})$ такое, что $x^- < x_2 - \delta(x_2, y)$. Тогда

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x_2-\delta(x_2,y),x_2+y))}\,\|v\|_{L^q((x_2-\delta(x_2,y),x_2+y))} > 1$$

и

$$\begin{aligned}\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))}\,\|v\|_{L^q(\Delta(x))} &= \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x^-,b))}\,\|v\|_{L^q((x^-,b))} \\ &\geq \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x_2-\delta(x_2,y),x_2+y))}\,\|v\|_{L^q((x_2-\delta(x_2,y),x_2+y))} > 1.\end{aligned}$$

Получили противоречие. Следовательно, $x^+ < b$.

Пусть $x \in (a_0, b)$. Из определения a_0 вытекает существование числа $x_1 \in (a_0, x)$ такого, что $x_1^- > a$. Предположим, что $x^- = a$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_1^+} \rho^{-p'} = \int_{x_1^-}^{x_1} \rho^{-p'} < \int_a^x \rho^{-p'} = \int_x^{x^+} \rho^{-p'} < \int_{x_1}^{x^+} \rho^{-p'}.$$

Откуда $x_1 + d^+(x_1) = x_1^+ < x^+$. В частности, $x_1^+ < b$, что, в силу $\int_a^{x_1} \rho^{-p'} > \int_{x_1}^{x_1^+} \rho^{-p'}$, влечет $\sup D_{x_1} > d^+(x_1)$. Пусть $y \in (d^+(x_1), \min\{\sup D_{x_1}, x^+ - x_1\})$. Тогда

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x_1-\delta(x_1,y),x_1+y))} \|v\|_{L^q((x_1-\delta(x_1,y),x_1+y))} > 1$$

и

$$\begin{aligned} &\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} = \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,x^+))} \|v\|_{L^q((a,x^+))} \\ &\geq \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x_1-\delta(x_1,y),x_1+y))} \|v\|_{L^q((x_1-\delta(x_1,y),x_1+y))} > 1. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Следовательно, $x^- > a$.

Пусть $b_0 < b$. Фиксируем $x \in (b_0, b)$. Тогда $x^+ = x + d^+(x) = b$, $d^+(x) = \sup D_x$ и, следовательно, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x^-,b))} \|v\|_{L^q((x^-,b))} \leq 1$. Так как $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x^-,b))} > 0$, то $\|v\|_{L^q((x,b))} < \infty \Rightarrow \|v\|_{L^q((e,b))} < \infty$. Если выполнено $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x^-,b))} < \infty$, то $h_b < \infty$. Пусть $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x^-,b))} = \infty$. Тогда при $y \to d^+(x) - 0$ выполнено $\int_x^{x+y} \rho^{-p'} \to \infty \Rightarrow \int_{x-\delta(x,y)}^x \rho^{-p'} \to \infty \Rightarrow x - \delta(x,y) \to a$. Учитывая, что при $y \to d^+(x) - 0$ выполнено $\delta(x,y) \to d^-(x)$, имеем $x^- = a$ и, следовательно, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,b))} \|v\|_{L^q((a,b))} \leq 1$. Пришли к противоречию с $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,b))} = \infty$ и $\|v\|_{L^q((a,b))} > 0$. Таким образом, $h_b < \infty$.

Пусть $h_b < \infty$. Тогда $\int_e^b \rho^{-p'} < \infty$ и $\|v\|_{L^q((e,b))} < \infty$. Следовательно, существует $c \in (e,b)$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((c,b))} \|v\|_{L^q((c,b))} < 1$. Пусть $x_0 \in (c,b)$ такая, что $\int_c^{x_0} \rho^{-p'} = \int_{x_0}^b \rho^{-p'}$. Тогда $\sup D_{x_0} = b - x_0$, $x_0 - \delta(x_0, \sup D_{x_0}) = c$. Учитывая $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((c,b))} \|v\|_{L^q((c,b))} < 1$, имеем $d^+(x_0) = b - x_0$. Откуда $b_0 \leq x_0 < b$.

Пусть $a < a_0$. Фиксируем $x \in (a, a_0)$. Тогда $x^- = x + d^-(x) = a$ и $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,x^+))} \|v\|_{L^q((a,x^+))} \leq 1$. Так как $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,x^+))} > 0$, то $\|v\|_{L^q((a,x))} < \infty \Rightarrow \|v\|_{L^q((a,e))} < \infty$. Если $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,x^+))} < \infty$, то $h_a < \infty$. Пусть, теперь, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,x^+))} = \infty$. Тогда при $y \to d^+(x) - 0$ выполнено

$$\int_x^{x+y} \rho^{-p'} = \int_{x-\delta(x,y)}^x \rho^{-p'} \to \infty.$$

Следовательно, $d^+(x) = b - x$ и $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,b))}\,\|v\|_{L^q((a,b))} \le 1$. Пришли к противоречию с $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,b))} = \infty$ и $\|v\|_{L^q((a,b))} > 0$. Таким образом, $h_a < \infty$.

Пусть $h_a < \infty$. Тогда $\int_a^e \rho^{-p'} < \infty$ и $\|v\|_{L^q((a,e))} < \infty$. Следовательно, существует $c \in (a,e)$ такая, что $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,c))}\,\|v\|_{L^q((a,c))} < 1$. Пусть $x_0 \in (a,c)$ такая, что $\int_a^{x_0} \rho^{-p'} = \int_{x_0}^c \rho^{-p'}$. Тогда $\sup D_{x_0} = c - x_0$, $x_0 - \delta(x_0, \sup D_{x_0}) = a$. Учитывая $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,c))}\,\|v\|_{L^q((a,c))} < 1$, имеем $d^+(x_0) = c - x_0$, $d^-(x_0) = x_0 - a$. Откуда $a < x_0 \le a_0$.

Пусть $q < \infty$, $(a_0, b_0) \ne \varnothing$ и $x \in (a_0, b_0)$. Предположим, что выполнено $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))}\,\|v\|_{L^q(\Delta(x))} < 1$. Тогда $\sup D_x = d^+(x)$ (при $q = \infty$ возможен скачок у функции $y \mapsto \|v\|_{L^\infty((x-\delta(x,y), x+y))}$ в точке $y = d^+(x)$ и в этом случае возможно $d^+(x) < \sup D_x$). Так как $x < b_0$, то $x + d^+(x) < b$. Откуда $\sup D_x < b - x$, и, следовательно, $x^- = a$. Получили противоречие, и, тем самым, (8) доказано. $\square$

Следующий пример показывает, что при $q = \infty$ равенство (8) может не выполняться.

2.7. Пример. Пусть $p = q = \infty$ (следовательно $p' = 1$), $I := (0, \infty)$, $\rho(t) := t$, $t \in I$. Фиксируем $x \in I$. Для $y \in [0, \infty)$ выполнено $x + y \in I$ и $\infty = \int_0^x \frac{1}{\rho} > \int_x^{x+y} \frac{1}{\rho}$. Откуда $D_x = [0, \infty)$. Пусть $v(t) := 2\chi_{(0,1)}(t) + \frac{1}{2}\chi_{[1,e^2]}(t) + 2\chi_{(e^2,\infty)}(t)$, $t \in I$. Тогда $h_0 = h_\infty = \infty$ и $a_0 = a = 0$, $b_0 = b = \infty$.

Пусть $x \in (e, e^{\frac{3}{2}}]$. Фиксируем $y \in (0, e^2 - x)$. Имеем

$$\int_x^{x+y} \frac{1}{\rho} < \int_x^{e^2} \frac{1}{\rho} = \ln \frac{e^2}{x}, \quad \int_{x-(x-\frac{x^2}{e^2})}^{x} \frac{1}{\rho} = \int_{\frac{x^2}{e^2}}^{x} \frac{1}{\rho} = \ln \frac{e^2}{x}.$$

Откуда $\delta(x,y) \le x - \frac{x^2}{e^2}$ и, следовательно,

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))}\,\|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \le \int_{\frac{x^2}{e^2}}^{e^2} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^4}{x^2} < 1,$$

то есть $y \in \tilde{D}_x$ для $y \in (0, e^2 - x)$.

Фиксируем $y \in (e^2 - x, \infty)$. Тогда

$$\int_x^{x+y} \frac{1}{\rho} > \int_x^{e^2} \frac{1}{\rho} = \ln \frac{e^2}{x}$$

и, следовательно, $\delta(x,y) > x - \frac{x^2}{e^2}$. Тогда

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))}\,\|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \ge \int_{\frac{x^2}{e^2}}^{e^2} \frac{1}{\rho} \cdot 2 = 2 \ln \frac{e^4}{x^2} \ge 2,$$

то есть $y \notin \tilde{D}_x$ для $y \in (e^2 - x, \infty)$.

Таким образом, $d^+(x) = e^2 - x$, $d^-(x) = x - \frac{x^2}{e^2}$, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^4}{x^2} < 1$, $x \in (a_0, b_0)$. Кроме того, для любого $x \in (e, e^{\frac{3}{2}}]$ выполнено $\mu^+(x) = e^2$.

Пусть $x \in [e^{\frac{1}{2}}, e)$. Фиксируем $y \in (0, x^2 - x)$. Имеем

$$\int_x^{x+y} \frac{1}{\rho} < \int_x^{x^2} \frac{1}{\rho} = \ln x, \quad \int_{x-(x-1)}^{x} \frac{1}{\rho} = \int_1^x \frac{1}{\rho} = \ln x.$$

Откуда $\delta(x, y) \leq x - 1$ и, следовательно,

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))} \|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \leq \int_1^{x^2} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{2} = \ln x < 1,$$

то есть $y \in \tilde{D}_x$ для $y \in (0, x^2 - x)$.

Фиксируем $y \in (x^2 - x, \infty)$. Тогда

$$\int_x^{x+y} \frac{1}{\rho} > \int_x^{x^2} \frac{1}{\rho} = \ln x$$

и, следовательно, $\delta(x, y) > x - 1$. Тогда

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))} \|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \geq \int_1^{x^2} \frac{1}{\rho} \cdot 2 = 4\ln x \geq 2,$$

то есть $y \notin \tilde{D}_x$ для $y \in (x^2 - x, \infty)$.

Таким образом, $d^+(x) = x^2 - x$, $d^-(x) = x - 1$, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} = \ln x < 1$, $x \in (a_0, b_0)$. Кроме того, для любого $x \in (e^{\frac{1}{2}}, e)$ выполнено $\mu^-(x) = 1$.

2.8. Лемма. *Пусть* $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$*-п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. *Функция* μ^- *возрастает (при* $q < \infty$ *строго) на* $[a_0, b)\bigcap I$ *и непрерывна на* (a_0, b), *функция* μ^+ *возрастает (при* $q < \infty$ *строго) на* $(a, b_0]\bigcap I$ *и непрерывна на* (a, b_0). *Если* $h_a < \infty$, *то* $\mu^+(a - 0) = a$, $\mu^-(x) = a = \mu^-(a_0 + 0)$ *для всех* $x \in (a, a_0]$. *Если* $h_b < \infty$, *то* $\mu^-(b - 0) = b$, $\mu^+(x) = b = \mu^+(b_0 - 0)$ *для всех* $x \in [b_0, b)$. *Если* $h_a = \infty$, *то* $\mu^+(a + 0) \leq a^* := \inf\{t \in I : \int_a^t v > 0\}$. *Если* $h_a = \infty$ *и* $q < \infty$, *то* $\mu^+(a + 0) = a^*$. *Если* $h_b = \infty$, *то* $\mu^-(b - 0) \geq b^* := \sup\{t \in I : \int_t^b v > 0\}$. *Если* $h_b = \infty$ *и* $q < \infty$, *то* $\mu^-(b - 0) = b^*$. *Выполнено* $a^* < b^*$, *и существуют* $\alpha, \beta \in I$ *такие, что* $\alpha^+ < \beta^-$.

Доказательство. По определению точек a_0, b_0, $\mu^-(x) = a$ для $x \in (a, a_0)$, $\mu^+(x) = b$ для $x \in (b_0, b)$.

Покажем возрастание μ^- на $[a_0, b)\bigcap I$. Для этого предположим противное, пусть $x, z \in [a_0, b)\bigcap I$, $x < z$, но $\mu^-(x) > \mu^-(z)$. В частности, $\mu^-(x) > a$. Если $\mu^+(z) \le \mu^+(x)$, то, учитывая $[\mu^-(x), x] \subset (\mu^-(z), z)$,

$$\int_{z^-}^{z} \rho^{-p'} > \int_{x^-}^{x} \rho^{-p'} = \int_{x}^{x^+} \rho^{-p'} > \int_{z}^{z^+} \rho^{-p'},$$

что противоречит (6). Пусть $\mu^+(z) > \mu^+(x)$. Тогда $\mu^+(x) < b$ и $[x^-, x^+] \subset (z^-, z^+)$. Предположим, что $d^+(x) < \sup D_x$. Тогда существует точка $y \in (d^+(x), \min\{\sup D_x, z^+ - x\})$ такая, что $z^- < x - \delta(x, y) < x^-$. При этом

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((x-\delta(x,y),x+y))} \|v\|_{L^q((x-\delta(x,y),x+y))} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(z))} \|v\|_{L^q(\Delta(z))} \le 1.$$

Получили противоречие с определением $d^+(x)$. Следовательно, $\sup D_x = d^+(x) < b - x$ и $\mu^-(x) = a$. Получили противоречие.

Покажем возрастание μ^+ на $(a, b_0]\bigcap I$. Для этого предположим противное, пусть $x, z \in (a, b_0]\bigcap I$, $x < z$, но $\mu^+(x) > \mu^+(z)$. Заметим, что $\mu^+(z) < b$. Если $\mu^-(x) = \mu^-(z)$, то, учитывая $[z, \mu^+(z)] \subset (x, \mu^+(x))$,

$$\int_{z}^{z^+} \rho^{-p'} < \int_{x}^{x^+} \rho^{-p'} = \int_{x^-}^{x} \rho^{-p'} < \int_{z^-}^{z} \rho^{-p'},$$

что противоречит (6). Пусть $\mu^-(z) > \mu^-(x)$. Тогда $\mu^-(z) > a$ и $[z^-, z^+] \subset (x^-, x^+)$. Предположим, что $d^+(z) < \sup D_z$. Тогда существует точка $y \in (d^+(z), \min\{\sup D_z, x^+ - z\})$ такая, что $x^- < z - \delta(z, y) < z^-$. При этом

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((z-\delta(z,y),z+y))} \|v\|_{L^q((z-\delta(z,y),z+y))} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} \le 1.$$

Получили противоречие с определением $d^+(z)$. Следовательно, $\sup D_z = d^+(z) < b - z$ и $\mu^-(z) = a$. Получили противоречие.

Пусть $q < \infty$, $x, z \in [a_0, b)\bigcap I$, $x < z$ и $\mu^-(x) = \mu^-(z)$. Рассмотрим случай $x < b_0$. Фиксируем $t \in (x, \min\{z, b_0\})$. Если $\mu^+(t) = \mu^+(z)$, то

$$\int_{t^-}^{t} \rho^{-p'} < \int_{z^-}^{z} \rho^{-p'} = \int_{z}^{z^+} \rho^{-p'} < \int_{t}^{t^+} \rho^{-p'}. \tag{9}$$

Получили противоречие с (6). Если $\mu^+(t) < \mu^+(z)$, то

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(t))} \|v\|_{L^q(\Delta(t))} < \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(z))} \|v\|_{L^q(\Delta(z))} \le 1,$$

что противоречит (8). Случай $x \ge b_0$. Фиксируем $t \in (x, z)$. Имеем $\mu^-(t) = \mu^-(z)$ и $\mu^+(t) = \mu^+(z) = b$. Откуда выполнено (9), что противоречит (6).

Пусть $q < \infty$, $x, z \in (a, b_0] \bigcap I$, $x < z$ и $\mu^+(x) = \mu^+(z)$. Рассмотрим случай $z > a_0$. Фиксируем $t \in (\max\{x, a_0\}, z)$. Если $\mu^-(t) = \mu^-(x)$, то

$$\int_{t^-}^{t} \rho^{-p'} > \int_{x^-}^{x} \rho^{-p'} = \int_{x}^{x^+} \rho^{-p'} > \int_{t}^{t^+} \rho^{-p'}. \tag{10}$$

Получили противоречие с (6). Если $\mu^-(t) > \mu^-(x)$, то

$$\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(t))} \|v\|_{L^q(\Delta(t))} < \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} \leq 1,$$

что противоречит (8). Случай $z \leq a_0$. Фиксируем $t \in (x, z)$. Имеем $\mu^+(t) = \mu^+(x)$ и $\mu^-(t) = \mu^-(x) = a$. Откуда выполнено (10), что противоречит (6).

Таким образом, в каждой точке $x \in I$ существуют односторонние пределы $\mu^-(x-0)$, $\mu^-(x+0)$, $\mu^+(x-0)$, $\mu^+(x+0)$. Кроме того, существуют $\mu^+(a+0)$ и $\mu^-(b-0)$.

Заметим, что для произвольных $x, z \in I$, $x < z$ выполнено $\int_{x^-}^{z^+} \rho^{-p'} < \infty$. В противном случае ($x^- = a$ и $\int_a^z \rho^{-p'} = \infty$) или ($z^+ = b$ и $\int_x^b \rho^{-p'} = \infty$). В первом случае имеем $a < a_0$ и $h_a = \infty$, во втором $b_0 < b$ и $h_b = \infty$. В обоих случаях приходим к противоречию. Учитывая конечность интеграла $\int_{x^-}^{z^+} \rho^{-p'}$, запишем

$$\int_x^z \rho^{-p'} = \int_{z^-}^{z} - \int_{z^-}^{x} = \int_{z^-}^{z} - \left[\int_{x^-}^{x} - \int_{x^-}^{z^-}\right] = \int_{z^-}^{z} - \int_{x^-}^{x} + \int_{x^-}^{z^-},$$

$$\int_x^z \rho^{-p'} = \int_{x}^{x^+} - \int_{z}^{x^+} = \int_{x}^{x^+} - \left[\int_{z}^{z^+} - \int_{x^+}^{z^+}\right] = \int_{x}^{x^+} - \int_{z}^{z^+} + \int_{x^+}^{z^+}.$$

Складывая, получим

$$2\int_x^z \rho^{-p'} = \int_{x^-}^{z^-} \rho^{-p'} + \int_{x^+}^{z^+} \rho^{-p'}. \tag{11}$$

Откуда при $x \to z - 0$ имеем

$$0 = \int_{\mu^-(z-0)}^{\mu^-(z)} \rho^{-p'} + \int_{\mu^+(z-0)}^{\mu^+(z)} \rho^{-p'},$$

то есть $\mu^-(z) = \mu^-(z-0)$ и $\mu^+(z) = \mu^+(z-0)$, ибо для любого промежутка $I' \subset I$ выполнено $\int_{I'} \rho^{-p'} > 0$. Аналогично из (11) при $z \to x + 0$ вытекает $\mu^-(x) = \mu^-(x+0)$ и $\mu^+(x) = \mu^+(x+0)$. Таким образом, для любой $x \in I$ выполнено $\mu^-(x) = \mu^-(x-0) = \mu^-(x+0)$ и $\mu^+(x) = \mu^+(x-0) = \mu^+(x+0)$.

В частности, доказана непрерывность μ^- на (a_0, b) и μ^+ на (a, b_0). Кроме того, если $a_0 \in I$, то $\mu^-(a_0) = \mu^-(a_0 - 0) = a$; если $b_0 \in I$, то $\mu^+(b_0) = \mu^+(b_0 + 0) = b$.

Далее, для $x \in I$

$$\int_a^{\mu^+(a+0)} \rho^{-p'} \le \int_a^{\mu^+(x)} \rho^{-p'} = \int_a^x \rho^{-p'} + \int_{\mu^-(x)}^x \rho^{-p'} \le 2\int_a^x \rho^{-p'},$$

$$\int_{\mu^-(b-0)}^b \rho^{-p'} \le \int_{\mu^-(x)}^b \rho^{-p'} = \int_x^b \rho^{-p'} + \int_x^{\mu^+(x)} \rho^{-p'} \le 2\int_x^b \rho^{-p'}.$$

Откуда при $h_a < \infty$ выполнено $\mu^+(a+0) = a$, при $h_b < \infty$ выполнено $\mu^-(b-0) = b$.

Пусть $h_a = \infty$. Предположим, что $\mu^+(a+0) > a^*$. Тогда для любого $t \in (a, \mu^+(a+0))$ имеем

$$\left(\int_{\mu^-(t)}^{\mu^+(a+0)} \rho^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mu^-(t)}^{\mu^+(a+0)} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(t))} \|v\|_{L^q(\Delta(t))} \le 1.$$

Устремляя $t \to a + 0$, приходим к противоречию

$$\infty = \left(\int_a^{\mu^+(a+0)} \rho^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^{\mu^+(a+0)} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \le 1.$$

Пусть $q < \infty$, $h_a = \infty$. Тогда $a_0 = a < b_0$ и, для любого $x \in (a, b_0)$ выполнено (8). Если $\mu^+(a+0) < a^*$, то для $x \in (a, b_0)$, у которых $\mu^+(x) < a^*$, имеем $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} = 0$. Получили противоречие.

Пусть $h_b = \infty$. Предположим, что $\mu^-(b-0) < b^*$. Тогда для любого $t \in (\mu^-(b-0), b)$ имеем

$$\left(\int_{\mu^-(b-0)}^{\mu^+(t)} \rho^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mu^-(b-0)}^{\mu^+(t)} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(t))} \|v\|_{L^q(\Delta(t))} \le 1.$$

Устремляя $t \to b - 0$, приходим к противоречию

$$\infty = \left(\int_{\mu^-(b-0)}^b \rho^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mu^-(b-0)}^b v^q\right)^{\frac{1}{q}} \le 1.$$

Пусть $q < \infty$, $h_b = \infty$. Тогда $a_0 < b_0 = b$ и, для любого $x \in (a_0, b)$ выполнено (8). Если $\mu^-(b-0) > b^*$, то для $x \in (a_0, b)$, у которых $\mu^-(x) > b^*$, имеем $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))} = 0$. Получили противоречие.

Так как $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, то существует точка $e \in I$ такая, что $\|v\|_{L^1((a,e))} > 0$ и $\|v\|_{L^1((e,b))} > 0$. По определению a^*, b^*, $\|v\|_{L^1((a,a^*))} = 0$ и $\|v\|_{L^1((b^*,b))} = 0$. Поэтому $a^* < e < b^*$. Далее, $\mu^+(I) \supset (a^*, b)$ и $\mu^-(I) \supset (a, b^*)$. Пусть $t_1 \in (a^*, e)$ и $t_2 \in (e, b^*)$. Выберем $\alpha \in (\mu^+)^{-1}(\{t_1\})$ и $\beta \in (\mu^-)^{-1}(\{t_2\})$. Тогда $\alpha^+ < \beta^-$. □

2.9. Лемма. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$*-п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. $\mu^- \in AC_{\mathrm{loc}}((a_0, b))$; *если* $-\infty < a$, *то* $\mu^- \in AC((a,\beta])$ *для любого* $\beta \in I$; *если* $b < \infty$, *то* $\mu^- \in AC([\alpha, b))$ *для любого* $\alpha \in (a_0, b)$; *если* $-\infty < a$ *и* $b < \infty$, *то* $\mu^- \in AC(I)$.

$\mu^+ \in AC_{\mathrm{loc}}((a, b_0))$; *если* $b < \infty$, *то* $\mu^+ \in AC([\alpha, b))$ *для любого* $\alpha \in I$; *если* $-\infty < a$, *то* $\mu^+ \in AC((a,\beta])$ *для любого* $\beta \in (a, b_0)$; *если* $-\infty < a$ *и* $b < \infty$, *то* $\mu^+ \in AC(I)$.

Доказательство. Предположим, что μ^- не принадлежит пространству $AC_{\mathrm{loc}}((a_0, b))$. Тогда существуют $[\alpha, \beta] \subset (a_0, b)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ существует конечный набор непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, \beta]$, для которого

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta, \quad \sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| > \varepsilon.$$

Не теряя общности, можно считать, что $\varepsilon < \beta - \alpha$.

Пусть Q_ε семейство всех подмножеств $Q \subset [\alpha^-, \beta]$ таких, что $\mathcal{L}^1(Q) > \varepsilon$. Положим

$$M := \inf_{Q \in Q_\varepsilon} \int_Q \rho^{-p'}.$$

Предположим, что $M = 0$. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим $E_n := \{x \in [\alpha^-, \beta] : \rho(x)^{-p'} < \frac{1}{n}\}$. Предположим, что $\mathcal{L}^1(E_n) < \varepsilon$. Тогда для любого $Q \in Q_\varepsilon$ выполнено

$$\mathcal{L}^1(Q \bigcap ([\alpha^-, \beta] \setminus E_n)) \ge \varepsilon - \mathcal{L}^1(E_n),$$

ибо иначе

$$\mathcal{L}^1(Q) = \mathcal{L}^1(Q \bigcap E_n) + \mathcal{L}^1(Q \bigcap ([\alpha^-, \beta] \setminus E_n)) < \mathcal{L}^1(E_n) + (\varepsilon - \mathcal{L}^1(E_n)) = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $Q \in Q_\varepsilon$ выполнено

$$\int_Q \rho^{-p'} \ge \int_{Q \bigcap ([\alpha^-, \beta] \setminus E_n)} \rho^{-p'} \ge \frac{1}{n}(\varepsilon - \mathcal{L}^1(E_n)).$$

Откуда $0 = M \geq \frac{1}{n}(\varepsilon - \mathcal{L}^1(E_n))$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathcal{L}^1(E_n) \geq \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее $\mathcal{L}^1(E_n) \leq \beta - \alpha^- < \infty$, $E_{n+1} \subset E_n$. Поэтому

$$\mathcal{L}^1(\{x \in [\alpha^-, \beta] : \rho(x)^{-p'} = 0\}) = \mathcal{L}^1(\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^1(E_n) \geq \varepsilon.$$

Получили противоречие с условием $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I. Таким образом, $M > 0$.

Из конечности интеграла $\int_\alpha^\beta \rho^{-p'}$ вытекает существование $\delta_0 > 0$ такого, что для любого измеримого подмножества $Q \subset [\alpha, \beta]$, у которого $\mathcal{L}^1(Q) < \delta_0$, выполнено $\int_Q \rho^{-p'} < \frac{M}{4}$. По предположению, существует конечный набор непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, \beta]$, для которого

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta_0, \quad \sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| > \varepsilon.$$

В силу равенства (11), возрастания и непрерывности μ^- на (a_0, b) имеем

$$2\int_{\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)} \rho^{-p'} \geq \int_{\cup_{i=1}^n(\alpha_i^-,\beta_i^-)} \rho^{-p'} = \int_{\mu^-(\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i))} \rho^{-p'}.$$

Учитывая, что $\mathcal{L}^1(\cup_{i=1}^n(\alpha_i, \beta_i)) < \delta_0$ и

$$\mathcal{L}^1(\mu^-(\cup_{i=1}^n(\alpha_i, \beta_i))) = \sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| > \varepsilon,$$

находим

$$\frac{1}{2}M > 2\int_{\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)} \rho^{-p'} \geq \int_{\mu^-(\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i))} \rho^{-p'} \geq M.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu^- \in AC_{\text{loc}}((a_0, b))$.

Пусть $-\infty < a$. Фиксируем $\beta \in I$. Покажем, что $\mu^- \in AC((a, \beta])$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\mu^-(a_0 + 0) = a$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что выполнено $\mu^-(a_0 + \delta_0) - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $\beta \leq a_0 + \delta_0$, то положим $\delta := \delta_0$. Пусть $\beta > a_0 + \delta_0$. Тогда, как показано выше, $\mu^- \in AC([a_0 + \frac{\delta_0}{2}, \beta])$. Следовательно, существует $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{3})$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_0 + \frac{\delta_0}{2}, \beta]$, для которого $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Фиксируем произвольный конечный набор непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^m$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset (a, \beta]$, для которого $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Тогда, учитывая монотонность μ^- на I, находим

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| = \sum_{i\colon \beta_i \le a_0+\delta_0} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| +$$

$$+ \sum_{i\colon \beta_i > a_0+\delta_0} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \mu^-(a_0+\delta_0) - a + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Заметим, что $\mu^- \notin AC_{\mathrm{loc}}(I)$ в случае $-\infty = a < a_0$, ибо для любого $x > a_0$ выполнено $\mu^-(x) - \mu^-(a_0) = \infty$.

Пусть $b < \infty$. Фиксируем $\alpha \in (a_0, b)$. Покажем, что $\mu^- \in AC([\alpha, b))$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\mu^-(b-0) \le b < \infty$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что выполнено $\mu^-(b-0) - \mu^-(b-\delta_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $\alpha \ge b - \delta_0$, то положим $\delta := \delta_0$. Пусть $\alpha < b - \delta_0$. Тогда, как показано выше, $\mu^- \in AC([\alpha, b - \frac{\delta_0}{2}])$. Следовательно, существует $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{3})$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, b - \frac{\delta_0}{2}]$, для которого $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Фиксируем произвольный конечный набор непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^m$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, b)$, для которого $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Тогда, учитывая монотонность μ^- на I, находим

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| = \sum_{i\colon \alpha_i \ge b-\delta_0} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| +$$

$$+ \sum_{i\colon \alpha_i < b-\delta_0} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \mu^-(b-0) - \mu^-(b-\delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Пусть $-\infty < a < b < \infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Фиксируем $\gamma_1, \gamma_2 \in (a_0, b)$, $\gamma_1 < \gamma_2$. Так как $\mu^- \in AC((a, \gamma_2])$, то существует $\delta_1 \in (0, \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{3})$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset (a, \gamma_2]$, для которого $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta_1$, выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\mu^- \in AC([\gamma_1, b))$, то существует $\delta \in (0, \delta_1)$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^n$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\gamma_1, b)$, для которого $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Фиксируем произвольный конечный набор непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_1^m$, $[\alpha_i, \beta_i] \subset I$, для которого $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| = \sum_{i\colon \beta_i \le \gamma_2} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| +$$

$$+ \sum_{i\colon \beta_i > \gamma_2} |\mu^-(\beta_i) - \mu^-(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Утверждения для μ^+ доказываются аналогично. $\square$

2.10. Следствие. *Пусть* $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$*-п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. *Функция* $F : I \to [0, \infty]$ *вида*

$$F(x) := \int_{\mu^-(x)}^{\mu^+(x)} \rho^{-p'}, \quad x \in I,$$

принадлежит пространству $AC_{\mathrm{loc}}(I)$.

Доказательство. Заметим, что

$$F(x) = 2\int_{\mu^-(x)}^{x} \rho^{-p'} = 2\int_{x}^{\mu^+(x)} \rho^{-p'}, \quad x \in I,$$

в силу (6). Для $x \in I$ выполнено $\mu^-(x) < x < \mu^+(x)$, и, следовательно, $F(x) > 0$.

1. Пусть $h_a = h_b = \infty$. Тогда $a_0 = a$, $b_0 = b$ и, по лемме 2.9, $\mu^-, \mu^+ \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$. Фиксируем $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Заметим, что $\mu^-(\alpha), \mu^+(\beta) \in I$ и $F(x) = G(\mu^+(x)) - G(\mu^-(x))$, где $G(t) := \int_{\mu^-(\alpha)}^{t} \rho^{-p'}$, $t \in [\mu^-(\alpha), \mu^+(\beta)]$. Так как функции $\mu^-, \mu^+ \in AC([\alpha, \beta])$ и возрастают, $G \in AC([\mu^-(\alpha), \mu^+(\beta)])$, то $F \in AC([\alpha, \beta])$.

2. Пусть $h_a < \infty$. Тогда для любого $t \in (a, b)$ существует интеграл $\int_a^t \rho^{-p'} =: G(t)$. Заметим, что $F(x) = 2(G(x) - G(\mu^-(x)))$, $x \in I$, и $G \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$. Покажем, что $G \circ \mu^- \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$. Фиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Если $\beta \le a_0$, то $G \circ \mu^- = 0$ на $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, $G \circ \mu^- \in AC([\alpha, \beta])$. Пусть $\beta > a_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу леммы 2.8 существует $t_0 \in (a_0, \beta)$ такое, что $\int_a^{\mu^-(t_0)} \rho^{-p'} < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $G \in AC([\mu^-(\frac{a_0+t_0}{2}), \mu^-(\beta)])$, $\mu^- \in AC([\frac{a_0+t_0}{2}, \beta])$ и возрастает, то $G \circ \mu^- \in AC([\frac{a_0+t_0}{2}, \beta])$. Поэтому существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого набора $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ непересекающихся интервалов таких, что $[\alpha_j, \beta_j] \subset [\frac{a_0+t_0}{2}, \beta]$ и $\sum_j |\beta_j - \alpha_j| < \delta_0$ выполнено $\sum_j |(G \circ \mu^-)(\beta_j) - (G \circ \mu^-)(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $\delta \in (0, \min\{\delta_0, \frac{t_0 - a_0}{3}\})$. Тогда для любого набора $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ непересекающихся интервалов таких, что $[\alpha_j, \beta_j] \subset [\alpha, \beta]$ и $\sum_j |\beta_j - \alpha_j| < \delta$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\sum_j |(G \circ \mu^-)(\beta_j) - (G \circ \mu^-)(\alpha_j)| \\
&\le \Big[\sum_{j\colon [\alpha_j, \beta_j] \subset (a, t_0]} + \sum_{j\colon [\alpha_j, \beta_j] \subset [\frac{a_0+t_0}{2}, \beta]} \Big] |(G \circ \mu^-)(\beta_j) - (G \circ \mu^-)(\alpha_j)| \\
&\le \int_a^{\mu^-(t_0)} \rho^{-p'} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

3. Случай $h_b < \infty$ рассматривается аналогично. $\square$

3. Дополнительная информация о $W^1_{p,q}(I)$

Продолжено подробное доказательство фактов работы [5]. Результаты, касающиеся плотности вложения $C_0^\infty(I) \subset W^1_{p,q}(I)$, содержаться в работе [6]. Получены некоторые новые результаты.

3.1. Теорема. *Пусть $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\rm loc}(I)$, $v \in L^q_{\rm loc}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, точка $e \in I$ выбрана так, чтобы $\|v\|_{L^1((a,e))} > 0$ и $\|v\|_{L^1((e,b))} > 0$. Пусть $f \in W^1_{p,q}(I)$ и $\bar f$ есть представление f, о существовании которого говорится в лемме 1.2. Тогда*

1. *Если $h_a < \infty$ и $h_b = \infty$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) \Leftrightarrow \bar f(a+0) = 0$.*
2. *Если $h_a = \infty$ и $h_b < \infty$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) \Leftrightarrow \bar f(b-0) = 0$.*
3. *Если $h_a < \infty$ и $h_b < \infty$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) \Leftrightarrow \bar f(a+0) = \bar f(b-0) = 0$.*
4. *Если $h_a = \infty$ и $h_b = \infty$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$.*

Доказательство. Пусть $\phi \in AC_{\rm loc}(I)$, I_0 обозначает промежуток (быть может замкнутый), лежащий в I. Для $t, x \in I_0$ имеем

$$|\phi(x)| \le \left| \int_t^x |\phi'| \right| + |\phi(t)| \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} \|\rho\phi'\|_{L^p(I_0)} + |\phi(t)|. \tag{12}$$

Домножая неравенство (12) на $v(t)$ и интегрируя со степенью q по t вдоль промежутка I_0, получим

$$|\phi(x)|\|v\|_{L^q(I_0)} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} \|\rho\phi'\|_{L^p(I_0)} \|v\|_{L^q(I_0)} + \|v\phi\|_{L^q(I_0)}, \quad x \in I_0. \tag{13}$$

Домножая неравенство (12) на $\rho^{1-p'}(x)$ и интегрируя со степенью p по x вдоль промежутка I_0, получим

$$\|\rho^{1-p'}\phi\|_{L^p(I_0)} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|^{p'-1}_{L^{p'}(I_0)} (\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} \|\rho\phi'\|_{L^p(I_0)} + |\phi(t)|), \quad t \in I_0. \tag{14}$$

Пусть $0 < \|v\|_{L^q(I_0)} < \infty$. Из (13) вытекает

$$\sup_{x \in I_0} |\phi(x)| \le \left(\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} + \|v\|^{-1}_{L^q(I_0)} \right) \|\phi\|_{W^1_{p,q}(I_0)}. \tag{15}$$

При $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} = \|v\|^{-1}_{L^q(I_0)}$ из (13) следует более точная оценка

$$\sup_{x \in I_0} |\phi(x)| \le \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} \|\phi\|_{W^1_{p,q}(I_0)}, \tag{16}$$

а, также, имеет место оценка

$$\|\rho^{1-p'}\phi\|_{L^p(I_0)} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|^{p'-1}_{L^{p'}(I_0)} \sup_{x\in I_0}|\phi(x)| \le \|\tfrac{1}{\rho}\|^{p'}_{L^{p'}(I_0)}\|\phi\|_{W^1_{p,q}(I_0)}. \tag{17}$$

Фиксируем $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$. В силу леммы 1.5 при $h_a < \infty$ выполнено $\bar f(a+0) = 0$, при $h_b < \infty$ имеем $\bar f(b-0) = 0$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in I$ такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$, и функция $\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}$ определена равенством (4). Фиксируем функцию $f \in W^1_{p,q}(I)$. Тогда $\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}\bar f \in AC_{\rm loc}(I)$, $\operatorname{supp}(\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}\bar f)$ компакт в I, и справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|f - \omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}\bar f\|_{W^1_{p,q}(I)}\\
&= \|v(1-\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2})\bar f\|_{L^q(I)} + \|\rho((1-\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2})\bar f)'\|_{L^p(I)}\\
&\le \|vf\|_{L^q((a,\alpha_2)\cup(\beta_2,b))} + \|\rho Df\|_{L^p((a,\alpha_2)\cup(\beta_2,b))}+\\
&+ \|\rho(1-\omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2})'\bar f\|_{L^p((\alpha,\alpha_2)\cup(\beta_2,\beta))}\\
&= \|f\|_{W^1_{p,q}((a,\alpha_2)\cup(\beta_2,b))} + \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]^{-1}\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((\alpha_1,\alpha_2))}+\\
&+ \left[\int_{\beta_2}^{\beta_1}\rho^{-p'}\right]^{-1}\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))}.
\end{aligned} \tag{18}$$

1. Пусть $h_a < \infty$, $h_b = \infty$ и $\bar f(a+0) = 0$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\alpha_3, \beta_3 \in I$ так, чтобы $a_3 < b_3$ и $\|f\|_{W^1_{p,q}((a,\alpha_3)\cup(\beta_3,b))} < \frac{\varepsilon}{5}$. Пусть $\alpha_2 \in (a, \alpha_3)$. Применяя (14) к $I_0 := (a, \alpha_2)$, находим

$$\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((a,\alpha_2))} \le \left[\int_a^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]\|\rho\bar f'\|_{L^p((a,\alpha_2))} + \left[\int_a^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]^{\frac{1}{p}}|\bar f(t)|,\ t\in(a,\alpha_2).$$

Откуда при $t \to a+0$ получим

$$\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((a,\alpha_2))} \le \left[\int_a^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]\|\rho\bar f'\|_{L^p((a,\alpha_2))}.$$

Выберем $\alpha_1 \in (a, \alpha_2)$ так, чтобы $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho^{-p'} = \frac{1}{2}\int_a^{\alpha_2}\rho^{-p'}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]^{-1}\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((\alpha_1,\alpha_2))} &\le 2\left[\int_a^{\alpha_2}\rho^{-p'}\right]^{-1}\|\rho^{1-p'}\bar f\|_{L^p((a,\alpha_2))}\\
&\le 2\|\rho\bar f'\|_{L^p((a,\alpha_3))}.
\end{aligned}$$

Возможны два случая: $\int_{\beta_3}^b\rho^{-p'} = \infty$, $\int_{\beta_3}^b\rho^{-p'} < \infty$.

Случай $\int_{\beta_3}^{b} \rho^{-p'} = \infty$. Пусть $\beta_2 \in (\beta_3, b)$. Выберем $\beta_1 \in (\beta_2, b)$ так, чтобы $\left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right]^{-\frac{1}{p'}} |\bar{f}(\beta_2)| < \|\rho \bar{f}'\|_{L^p((\beta_3,b))}$. Тогда, применяя (14) к $I_0 := (\beta_2, \beta_1)$, находим

$$\|\rho^{1-p'} \bar{f}\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))} \leq \left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right] \|\rho \bar{f}'\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))} + \left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right]^{\frac{1}{p}} |\bar{f}(\beta_2)|.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right]^{-1} \|\rho^{1-p'} \bar{f}\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))} \leq \|\rho \bar{f}'\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))} + \left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right]^{-\frac{1}{p'}} |\bar{f}(\beta_2)| \\ < 2\|\rho \bar{f}'\|_{L^p((\beta_3,b))}.\end{aligned}$$

Случай $\int_{\beta_3}^{b} \rho^{-p'} < \infty$. Тогда, учитывая $h_b = \infty$, имеем $b^* = b$. Следовательно, $\mu^-(b-0) = \mu^+(b-0) = b$. Выберем $\beta \in I$ так, чтобы $(\beta^-, \beta^+) \subset (\beta_3, b)$. Применяя (17) к $I_0 := (\beta^-, \beta^+)$, получим

$$\|\rho^{1-p'} \bar{f}\|_{L^p(\Delta(\beta))} \leq \left[\int_{\Delta(\beta)} \rho^{-p'}\right] \|f\|_{W^1_{p,q}(\Delta(\beta))}.$$

Положим $\beta_2 := \beta^-$, $\beta_1 := \beta^+$. Тогда

$$\left[\int_{\beta_2}^{\beta_1} \rho^{-p'}\right]^{-1} \|\rho^{1-p'} \bar{f}\|_{L^p((\beta_2,\beta_1))} \leq \|f\|_{W^1_{p,q}((\beta_2,\beta_1))} \leq \|f\|_{W^1_{p,q}((\beta_3,b))}.$$

В обоих случаях (18) влечет

$$\|f - \omega_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} \bar{f}\|_{W^1_{p,q}(I)} \leq 5\|f\|_{W^1_{p,q}((a,\alpha_3)\cup(\beta_3,b))} < \varepsilon.$$

Таким образом, $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$.

Утверждения 2–4 доказываются аналогично. $\square$

3.2. Следствие. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-*п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, *точка* $e \in I$ *выбрана так, чтобы* $\|v\|_{L^1((a,e))} > 0$ *и* $\|v\|_{L^1((e,b))} > 0$. *Пусть* $f \in W^1_{p,q}(I)$ *и* $\bar{f}$ *есть представление* f, *о существовании которого говорится в лемме 1.2. Пусть* $\alpha, \beta \in I$ *такие, что* $\alpha < \beta$. *Положим*

$$\eta_a(x) := \begin{cases} 1, & x \in (a,\alpha], \\ \frac{\int_x^\beta \rho^{-p'}}{\int_\alpha^\beta \rho^{-p'}}, & x \in (\alpha,\beta), \\ 0, & x \in I \setminus [\beta, b); \end{cases} \qquad \eta_b(x) := \begin{cases} 0, & x \in I \setminus (a,\alpha] \\ \frac{\int_\alpha^x \rho^{-p'}}{\int_\alpha^\beta \rho^{-p'}}, & x \in (\alpha,\beta), \\ 1, & x \in [\beta, b). \end{cases}$$

Тогда

0. *В случае* $\int_a^e \rho^{-p'} < \infty$ *существует конечный предел* $\bar{f}(a+0)$, *в случае* $\int_e^b \rho^{-p'} < \infty$ *существует конечный предел* $\bar{f}(b-0)$ *(утверждение справедливо для* $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$*).*

1. *Если* $h_a < \infty$ *и* $h_b = \infty$, *то* $W^1_{p,q}(I) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) + \{\lambda\eta_a : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. *Если* $h_a = \infty$ *и* $h_b < \infty$, *то* $W^1_{p,q}(I) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) + \{\gamma\eta_b : \gamma \in \mathbb{R}\}$.

3. *Если* $h_a < \infty$ *и* $h_b < \infty$, *то* $W^1_{p,q}(I) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) + \{\lambda\eta_a + \gamma\eta_b : \lambda, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

4. *Если* $h_a = \infty$ *и* $h_b = \infty$, *то* $W^1_{p,q}(I) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$.

Доказательство. 0. Так как $\bar{f} \in AC_{\rm loc}(I)$, то для любых $x, t \in I_0 \subset I$ выполнено

$$|\bar{f}(t) - \bar{f}(x)| = \left|\int_x^t \bar{f}'\right| \le \|\rho\bar{f}'\|_{L^p(I_0)}\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)} \le \|f\|_{W^1_{p,q}(I)}\|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I_0)}. \quad (19)$$

Пусть $\int_a^e \rho^{-p'} < \infty$ (в частности, это выполнено при $h_a < \infty$). Тогда выполнено $\lim\limits_{d\to a+} \|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}((a,d))} = 0$. Откуда, учитывая (19) с $I_0 = (a,d)$, вытекает выполнение критерия Коши существования предела $\bar{f}(a+0)$. Аналогично доказывается существование $\bar{f}(b-0)$ при $\int_e^b \rho^{-p'} < \infty$ (в частности, при $h_b < \infty$).

Заметим, что при $h_a < \infty$ выполнено $\eta_a \in W^1_{p,q}(I)$, при $h_b < \infty$ выполнено $\eta_b \in W^1_{p,q}(I)$, ибо $\eta_a, \eta_b \in AC_{\rm loc}(I)$ и

$$\|\eta_a\|_{W^1_{p,q}(I)} \le \|v\|_{L^q((a,\beta))} + \|\tfrac{1}{\rho}\|^{-1}_{L^{p'}((\alpha,\beta))} < \infty, \text{ при } h_a < \infty,$$

$$\|\eta_b\|_{W^1_{p,q}(I)} \le \|v\|_{L^q((\alpha,b))} + \|\tfrac{1}{\rho}\|^{-1}_{L^{p'}((\alpha,\beta))} < \infty, \text{ при } h_b < \infty.$$

Поэтому в каждом утверждении 1–4 правая часть равенства содержится в левой части.

Пусть $h_a < \infty$, $h_b = \infty$. Фиксируем произвольную $f \in W^1_{p,q}(I)$. В силу 0, существует предел $\bar{f}(a+0) =: \lambda$. Положим $f_0 := \bar{f} - \lambda\eta_a$. Тогда $f_0 \in AC_{\rm loc}(I)\bigcap W^1_{p,q}(I)$ и $f_0(a+0) = 0$. По теореме 3.1, $f_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, и утверждение 1 доказано.

Утверждения 2, 3 доказываются аналогично, 4 следует из пункта 4 теоремы 3.1. $\square$

3.3. Лемма. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$*-п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\rm loc}(I)$, $v \in L^q_{\rm loc}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $a_0 < b_0$.

Пусть $f \in W^1_{p,q}(I)$ *и* $\bar f$ *есть представление* f*, о существовании которого говорится в лемме 1.2. Положим*

$$\omega(x) := \begin{cases} (\int_a^{a_0} \rho^{-p'})^{-1} \int_a^x \rho^{-p'}, & x \in (a, a_0), \\ 1, & x \in [a_0, b_0]\bigcap I, \\ (\int_{b_0}^b \rho^{-p'})^{-1} \int_x^b \rho^{-p'}, & x \in (b_0, b), \end{cases}$$

и $f_0 := \omega \bar f$*. Тогда* $f_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$*,* $\|f_0\|_{W^1_{p,q}(I)} \le 5\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}$ *и* $f = f_0$ *на* $[a_0, b_0]\bigcap I$*.*

Доказательство. Имеем $f_0 \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $f_0(a+0) = 0$ при $h_a < \infty$, $f_0(b-0) = 0$ при $h_b < \infty$. Так как $|f_0| \le |\bar f|$, то $\|vf_0\|_{L^q(I)} \le \|vf\|_{L^q(I)}$. Кроме того, $f_0' = \omega' \bar f + \omega \bar f'$ и $\|\rho\omega \bar f'\|_{L^p(I)} \le \|\rho \bar f'\|_{L^p(I)}$. Далее, для $\mathcal{L}^1$-п.в. $x \in I$ выполнено

$$\omega'(x) = \begin{cases} (\int_a^{a_0} \rho^{-p'})^{-1} \rho^{-p'}(x), & x \in (a, a_0), \\ 0, & x \in (a_0, b_0), \\ -(\int_{b_0}^b \rho^{-p'})^{-1} \rho^{-p'}(x), & x \in (b_0, b). \end{cases}$$

Положим $K(x) := \|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(x))} \|v\|_{L^q(\Delta(x))}$, $x \in I$. Пусть $c \in (a_0, b_0)$. Тогда $a < c^-$ и $c^+ < b$. В случае $h_a < \infty$ имеем $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}((a, c^+))$ и $v \in L^q((a, c^+))$, и, следовательно, K непрерывна на (a, c). Учитывая равенство $K(x) = 1$ при $x \in (a_0, b_0)$, получаем $K(a_0) = 1$. В частности, $0 < \|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(a_0))} < \infty$, $0 < \|v\|_{L^q(\Delta(a_0))} < \infty$. Аналогично, при $h_b < \infty$ выполнено $K(b_0) = 1$ и $0 < \|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(b_0))} < \infty$, $0 < \|v\|_{L^q(\Delta(b_0))} < \infty$. Применяя (17) к $I_0 = \Delta(a_0)$ и $I_0 = \Delta(b_0)$, получим

$$\|\rho^{1-p'} \bar f\|_{L^p(\Delta(a_0))} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|^{p'}_{L^{p'}(\Delta(a_0))} \|f\|_{W^1_{p,q}(\Delta(a_0))},$$

$$\|\rho^{1-p'} \bar f\|_{L^p(\Delta(b_0))} \le \|\tfrac{1}{\rho}\|^{p'}_{L^{p'}(\Delta(b_0))} \|f\|_{W^1_{p,q}(\Delta(b_0))}.$$

Откуда

$$\|\rho\omega' \bar f\|_{L^p(I)} \le 2(\|f\|_{W^1_{p,q}(\Delta(a_0))} + \|f\|_{W^1_{p,q}(\Delta(b_0))}) \le 4\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}.$$

Таким образом, $\|f_0\|_{W^1_{p,q}(I)} \le 5\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}$. Что, в силу теоремы 3.1, влечет $f_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$. □

Пусть $g \in \mathfrak{M}(I)$. Обозначим

$$A_1(g) := \left[\int_a^{a_0} \rho^{-p'}(t) \left|\int_a^t g\right|^{p'} dt\right]^{\frac{1}{p'}}, \quad A_2(g) := \left[\int_{b_0}^b \rho^{-p'}(t) \left|\int_t^b g\right|^{p'} dt\right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_3(g) := \left(\int_a^b v^q\right)^{-\frac{1}{q}} \left|\int_a^b g\right|.$$

3.4. Теорема. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$*-п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $a_0 < b_0$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Для конечности* $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ *и* $A_1(|g|) + A_2(|g|) + \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. *При этом*

$$\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) \approx A_1(|g|) + A_2(|g|) + \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g). \tag{20}$$

Доказательство. В силу следствия 1.10, далее считаем, что $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.

Если $a = a_0$ и $b = b_0$, то $W^1_{p,q}(I) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ и (20) выполнено. Пусть $a < a_0$ или $b_0 < b$.

Оценка сверху. Пусть $A_1(|g|) + A_2(|g|) + \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. Из конечности $A_1(|g|) + A_2(|g|)$ и $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ вытекает $\int_{(a,a_0)\cup(b_0,b)} |g| < \infty$. Фиксируем произвольную $f \in W^1_{p,q}(I)$. Пусть $f_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ строится по f как в лемме 3.3. Запишем

$$\int_a^b f|g| = \int_a^{a_0} f|g| + \int_{a_0}^{b_0} f|g| + \int_{b_0}^b f|g|$$
$$= \int_a^{a_0} \left[-\int_x^{a_0} \bar f' + \bar f(a_0)\right] |g(x)|dx + \int_{a_0}^{b_0} f_0|g| + \int_{b_0}^b \left[\int_{b_0}^x \bar f' + \bar f(b_0)\right] |g(x)|dx$$
$$= -\int_a^{a_0} \bar f'(t) \left(\int_a^t |g|\right) dt + \bar f(a_0) \int_a^{a_0} |g| + \int_{a_0}^{b_0} f_0|g| +$$
$$+ \int_{b_0}^b \bar f'(t) \left(\int_t^b |g|\right) dt + \bar f(b_0) \int_{b_0}^b |g|,$$

где перестановка интегралов оправдана в силу оценок

$$\int_a^{a_0} |\bar f'(t)| \left(\int_a^t |g|\right) dt \le A_1(|g|)\|\rho \bar f'\|_{L^p((a,a_0))} < \infty,$$

$$\int_{b_0}^b |\bar f'(t)| \left(\int_t^b |g|\right) dt \le A_2(|g|)\|\rho \bar f'\|_{L^p((b_0,b))} < \infty.$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&\bar{f}(a_0)\int_a^{a_0}|g| = \int_a^{a_0} f_0' \cdot \int_a^{a_0}|g| \\
&= \int_a^{a_0} f_0'(t)\left(\int_a^t |g|\right)dt + \int_a^{a_0} f_0'(t)\left(\int_t^{a_0}|g|\right)dt \\
&= \int_a^{a_0} f_0'(t)\left(\int_a^t |g|\right)dt + \int_a^{a_0} |g(x)|\left(\int_a^x f_0'\right)dx \\
&= \int_a^{a_0} f_0'(t)\left(\int_a^t |g|\right)dt + \int_a^{a_0} f_0|g|.
\end{aligned}
$$

Аналогично,

$$
\bar{f}(b_0)\int_{b_0}^b |g| = -\int_{b_0}^b f_0'(t)\left(\int_t^b |g|\right)dt + \int_{b_0}^b f_0|g|.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f|g| \\
&= \int_a^{a_0}(f_0'(t)-\bar{f}'(t))\left(\int_a^t |g|\right)dt + \int_{b_0}^b(\bar{f}'(t)-f_0'(t))\left(\int_t^b |g|\right)dt + \int_a^b f_0|g|.
\end{aligned}
$$

Откуда,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |fg| \le A_1(|g|)\|\rho(|f|_0'-|\bar{f}|')\|_{L^p((a,a_0))} + A_2(|g|)\|\rho(|\bar{f}|'-|f|_0')\|_{L^p((b_0,b))}+ \\
&+ J_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(|g|)\|f_0\|_{W^1_{p,q}(I)} \lesssim \left[A_1(|g|)+A_2(|g|)+J_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(|g|)\right]\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}.
\end{aligned}
$$

Оценка снизу. Пусть $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. В силу следствия 3.2 при $a < a_0$ пространству $W^1_{p,q}(I)$ принадлежит функция η_a. Поэтому конечность $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g)$ влечет $g \in L^1((a,a_0))$. Аналогично, $g \in L^1((b_0,b))$ при $b_0 < b$. Что влечет конечность констант $A_1(|g|)$, $A_2(|g|)$.

Используем тестовые функции $F_1, F_2 \in W^1_{p,q}(I)$ вида

$$
F_1(x) := \chi_{(a,a_0)}(x)\int_x^{a_0}\rho^{-p'}(t)\left(\int_a^t |g|\right)^{p'-1}dt,
$$

$$
F_2(x) := \chi_{(b_0,b)}(x)\int_{b_0}^x \rho^{-p'}(t)\left(\int_t^b |g|\right)^{p'-1}dt.
$$

Имеем

$$\int_a^b F_1|g| = \int_a^{a_0} \rho^{-p'}(t) \left(\int_a^t |g|\right)^{p'} dt = A_1(|g|)^{p'},$$

$$\int_a^b F_2|g| = \int_{b_0}^b \rho^{-p'}(t) \left(\int_t^b |g|\right)^{p'} dt = A_2(|g|)^{p'}.$$

Кроме того,

$$\|F_1'\rho\|^p_{L^p(I)} = \int_a^{a_0} \rho^p(x) \left[\rho^{-p'}(x) \left|\int_a^x |g|\right|^{p'-1}\right]^p dx = A_1(|g|)^{p'}$$

и, в силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned}
\|F_1 v\|^q_{L^q(I)} &= \int_a^{a_0} v^q(x) \left(\int_x^{a_0} \rho^{-p'}(t) \left|\int_a^t |g|\right|^{p'-1} dt\right)^q dx \\
&\le \int_a^{a_0} v^q(x) \left[\int_x^{a_0} \rho^{-p'}\right]^{\frac{q}{p'}} \left[\int_x^{a_0} \rho^{-p'}(t) \left|\int_a^t |g|\right|^{p'} dt\right]^{\frac{q}{p}} dx \\
&\le A_1(|g|)^{\frac{qp'}{p}} \int_a^{a_0} v^q(x) \left[\int_x^{a_0} \rho^{-p'}\right]^{\frac{q}{p'}} dx \\
&\le A_1(|g|)^{\frac{qp'}{p}} \left(\|v\|_{L^q(\Delta(a_0))} \|\tfrac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(\Delta(a_0))}\right)^q = A_1(|g|)^{\frac{qp'}{p}}.
\end{aligned}$$

Аналогично, $\|F_2'\rho\|^p_{L^p(I)} = A_2(|g|)^{p'}$ и $\|F_2 v\|^q_{L^q(I)} \le A_2(|g|)^{\frac{qp'}{p}}$.

Объединяя все оценки, приходим к (20). $\square$

3.5. Теорема. *Пусть $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $a_0 < b_0$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. Тогда $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. При этом $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) \approx A_1(g) + A_2(g) + J_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g)$.*

Доказательство. Утверждение $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$ содержится в следствии 1.9. Пусть $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. Тогда по теореме 3.4 $A_1(|g|) + A_2(|g|) < \infty$ и $\int_{(a,a_0)\cup(b_0,b)} |g| < \infty$. Оценка сверху доказывается теми же утверждениями, что и в доказательстве теоремы 3.4 с заменой $|g|$ на g. Для доказательства оценки снизу используем тестовые функции $F_{1,0}, F_{2,0} \in W^1_{p,q}(I)$ вида

$$F_{1,0}(x) := \chi_{(a,a_0)}(x) \int_x^{a_0} \rho^{-p'}(t) \left|\int_a^t g\right|^{p'-1} \operatorname{sgn}\left[\int_a^t g\right] dt,$$

$$F_{2,0}(x) := \chi_{(b_0,b)}(x) \int_{b_0}^{x} \rho^{-p'}(t) \left| \int_t^b g \right|^{p'-1} \operatorname{sgn}\left[\int_t^b g \right] dt.$$

$\square$

3.6. Теорема. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-*п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $a_0 = b_0$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Для конечности* $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ *и* $A_1(|g|)+A_2(|g|)+A_3(|g|) < \infty$. *При этом* $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) \approx A_1(|g|)+A_2(|g|) + A_3(|g|)$.

Доказательство. В силу следствия 1.10, далее считаем, что $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Кроме того, так как $\|v\|_{L^1(I)} > 0$ и $a_0 = b_0$, то $\|v\|_{L^q(I)} \in (0,\infty)$ и $\chi_{(a,b)} \in W^1_{p,q}(I)$.

Оценка сверху. Пусть $A_1(|g|) + A_2(|g|) + A_3(|g|) < \infty$. Фиксируем произвольную $f \in W^1_{p,q}(I)$. Имеем

$$\int_a^b f|g| = -\int_a^{a_0} \bar{f}'(t) \left(\int_a^t |g| \right) dt + \bar{f}(a_0) \int_a^b |g| + \int_{b_0}^b \bar{f}'(t) \left(\int_t^b |g| \right) dt.$$

Заметим, что так как $a = \mu^-(a_0)$, $b = \mu^+(b_0)$ и $a_0 = b_0$, то $\Delta(a_0) = I$ и, следовательно, $\|\frac{1}{\rho}\|_{L^{p'}(I)} \|v\|_{L^q(I)} \le 1$. Применяя (13) для $I_0 = I$, $x = a_0$, получим

$$\left| \bar{f}(a_0) \int_a^b |g| \right| \le A_3(|g|) |\bar{f}(a_0)| \|v\|_{L^q(I)} \le A_3(|g|) \|f\|_{W^1_{p,q}(I)}.$$

Откуда

$$\left| \int_a^b f|g| \right| \le [A_1(|g|) + A_2(|g|) + A_3(|g|)] \|f\|_{W^1_{p,q}(I)}.$$

Оценка снизу получается при помощи тестовых функций F_1, F_2 и $F_3 := \chi_{(a,b)}$. $\square$

3.7. Теорема. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho < \infty$ $\mathcal{L}^1$-*п.в. на* I, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$, $a_0 = b_0$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Тогда* $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$. *При этом* $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) \approx A_1(g) + A_2(g) + A_3(g)$.

Доказательство. Утверждение $J_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$ содержится в следствии 1.9. Так как $\mathbf{J}_{W^1_{p,q}(I)}(g) < \infty$, то $A_1(|g|) + A_2(|g|) + A_3(|g|)) < \infty$. Оценка сверху доказывается теми же утверждениями, что и в доказательстве теоремы 3.6 с заменой $|g|$ на g. Для доказательства оценки снизу используем тестовые функции $F_{1,0}, F_{2,0}, F_3$. $\square$

3.8. Теорема. *Пусть* $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$ *и* $\operatorname{supp} f \subset (c,d) \subset\subset (a,b)$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует* $h \in C_0^\infty(I)$ *такая, что* $\operatorname{supp} h \subset (c,d)$, $\|f - h\|_{C(I)} < \varepsilon$ *и* $\|f - h\|_{W^1_{p,q}(I)} < \varepsilon$.

Доказательство. Так как $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$, то $C_0^1(I) \subset W^1_{p,q}(I)$. Фиксируем $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$. Пусть $\operatorname{supp} f \subset (c_0, d_0) \subset\subset (c_3, d_3) \subset\subset (c,d)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{2} \min\left\{ \left(\int_{c_3}^{d_3} v^q\right)^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{c_3}^{d_3} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{-\frac{1}{p'}}, \left(\int_{c_3}^{d_3} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{-\frac{1}{p'}}, 1 \right\}.$$

Выберем $d_2 \in (d_0, d_3)$ так, чтобы $\left(\int_{d_2}^{d_3} \rho^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Пусть выполнено $0 < \varepsilon_1 < \min\{\frac{\varepsilon_0}{12}, \frac{1}{3}(d_3 - d_2)\}$. Так как $\rho \in L^p([c_0, d_0])$, то существует (см. [8, Theorem 3.14]) $h_1 \in C([c_0, d_0])$ такая, что

$$\left(\int_{c_0}^{d_0} |f' - h_1|^p \rho^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_1 \min\left\{ \left(\int_{c_0}^{d_0} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{-\frac{1}{p'}}, 1 \right\}.$$

Выберем $c_1 \in (c_3, c_0)$, $d_1 \in (d_0, d_2)$ так, чтобы

$$|h_1(c_0)| \max\left\{ \left[\int_{c_1}^{c_0} \rho^p\right]^{\frac{1}{p}}, (c_0 - c_1) \right\} < \varepsilon_1,$$

$$|h_1(d_0)| \max\left\{ \left[\int_{d_0}^{d_1} \rho^p\right]^{\frac{1}{p}}, (d_1 - d_0) \right\} < \varepsilon_1.$$

Продолжим функцию h_1 на $(a, d_1]$ так, чтобы $h_1 = 0$ на $(a, c_1]$, на $[c_1, c_0]$ h_1 есть функция, чей график представляет собой отрезок, соединяющий точки $(c_1, 0)$ и $(c_0, h_1(c_0))$, на $[d_0, d_1]$ h_1 есть функция, чей график представляет собой отрезок, соединяющий точки $(d_0, h_1(d_0))$ и $(d_1, 0)$.

Имеем

$$\int_a^{d_1} h_1 = \int_{c_1}^{c_0} h_1 + \int_{c_0}^{d_0} h_1 + \int_{d_0}^{d_1} h_1.$$

По построению,

$$\left|\int_{c_1}^{c_0} h_1\right| \le |h_1(c_0)|(c_0 - c_1) < \varepsilon_1, \quad \left|\int_{d_0}^{d_1} h_1\right| \le |h_1(d_0)|(d_1 - d_0) < \varepsilon_1,$$

$$\left|\int_{c_0}^{d_0} h_1\right| = \left|\int_{c_0}^{d_0}(h_1 - f')\right| \le \left(\int_{c_0}^{d_0} |h_1 - f'|^p \rho^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{c_0}^{d_0} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \varepsilon_1.$$

Следовательно, $\left|\int_a^{d_1} h_1\right| < 3\varepsilon_1$. Определим $h_1 = 0$ на $(d_1, d_2]$. Если $\int_a^{d_1} h_1 = 0$, то положим $h_1 = 0$ на (d_2, b). Пусть, теперь, $\alpha := \operatorname{sign}\left(\int_a^{d_1} h_1\right) \ne 0$. Определим $h_1 = 0$ на $[d_3, b)$. Так как

$$0 < \left|\int_a^{d_1} h_1\right| < 3\varepsilon_1 < (d_3 - d_2),$$

то существуют $\gamma \in (0,1)$ и $\beta \in (0, \frac{1}{2}(d_3 - d_2))$ такие, что $\gamma(d_3 - d_2 - \beta) = |\int_a^{d_1} h_1|$. Продолжим h_1 на $[d_2, d_3]$ так, чтобы ее график представлял собой ломаную с вершинами в точках $(d_2, 0)$, $(d_2 + \beta, -\alpha\gamma)$, $(d_3 - \beta, -\alpha\gamma)$, $(d_3, 0)$. В обоих случаях $h_1 \in C_0(I)$ и $\int_I h_1 = 0$.

Положим $h_0(x) := \int_a^x h_1$. Тогда $h_0 \in C_0^1(I)$ и $h_0'(x) = h_1(x)$, $x \in I$. Откуда

$$\begin{aligned}
&\|(f' - h_0')\rho\|_{L^p(I)} \\
&= \left[\int_{c_1}^{c_0} |h_1|^p\rho^p + \int_{c_0}^{d_0} |f' - h_1|^p\rho^p + \int_{d_0}^{d_1} |h_1|^p\rho^p + \int_{d_2}^{d_3} |h_1|^p\rho^p\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon_0}{2}.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I} |f(x) - h_0(x)| &= \sup_{x\in I} \left|\int_a^x f' - \int_a^x h_1\right| \le \int_{c_3}^{d_3} |f' - h_1| \\
&\le \left(\int_{c_3}^{d_3} |f' - h_1|^p\rho^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{c_3}^{d_3} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{c_3}^{d_3} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(f - h_0)v\|_{L^q(I)} &\le \left(\int_{c_3}^{d_3} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{x\in I} |f(x) - h_0(x)| \\
&< \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{c_3}^{d_3} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{c_3}^{d_3} \frac{1}{\rho^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|f - h_0\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\|f - h_0\|_{W^1_{p,q}(I)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим символом g_τ среднюю в смысле Соболева функции g радиуса τ. Так как $\operatorname{supp} h_0 \subset [c_1, d_3]$, то существует $\tau^* > 0$ такое, что вложение $\operatorname{supp}\{(h_0)_\tau\} \subset (c, d)$ имеет место для любого $\tau \in (0, \tau^*)$. Кроме того,

$(h_0)_\tau \in C^\infty(I)$ и $(h_0')_\tau(x) = ((h_0)_\tau)'(x)$, $x \in I$. Так как функции h_0 и h_0' непрерывны и имеют компактные носители, то (см. [4, Theorem C.19 (i)])

$$\|h_0 - (h_0)_\tau\|_{C(I)} \to 0, \quad \|h_0' - ((h_0)_\tau)'\|_{C(I)} \to 0$$

при $\tau \to 0+0$. Выберем $\tau' \in (0, \tau^*)$ такую, что

$$\|h_0 - h\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4} \min\left\{ \left(\int_c^d v^q \right)^{-\frac{1}{q}}, 1 \right\}, \quad \|h_0' - h'\|_{C(I)} < \frac{\varepsilon}{4} \left(\int_c^d \rho^p \right)^{-\frac{1}{p}}$$

для $h := (h_0)_{\tau'}$. Таким образом, $\|f - h\|_{C(I)} < \varepsilon$ и $\|f - h\|_{W^1_{p,q}(I)} < \varepsilon$. □

3.9. Следствие. *Пусть* $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $g \in \mathfrak{M}(I)$. *Тогда* $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) = \overline{C_0^\infty(I)}$ *и* $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g) = J_{C_0^\infty(I)}(g)$.

Доказательство. Имеем $C_0^\infty(I) \subset \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$, что по теореме 3.8 влечет $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) \subset \overline{C_0^\infty(I)}$. Следовательно, $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I) = \overline{C_0^\infty(I)}$.

Ясно, что $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)}(g) \ge J_{C_0^\infty(I)}(g)$. Пусть $J_{C_0^\infty(I)}(g) < \infty$. Тогда $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Фиксируем произвольную функцию $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,q}(I)$. Пусть $(c, d) \subset\subset I$ выбран так, чтобы $\operatorname{supp} f \subset (c, d)$. По теореме 3.8 существует последовательность $\{h_n\} \subset C_0^\infty(I)$ такая, что $\operatorname{supp} h_n \subset (c, d)$, $\|f - h_n\|_{C(I)} \to 0$ и $\|f - h_n\|_{W^1_{p,q}(I)} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $g \in L^1([c, d])$, то

$$\frac{\left|\int_I fg\right|}{\|f\|_{W^1_{p,q}(I)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\int_I h_n g\right|}{\|h_n\|_{W^1_{p,q}(I)}} \le \sup_{h \in C_0^\infty(I)} \frac{\left|\int_I hg\right|}{\|h\|_{W^1_{p,q}(I)}} = J_{C_0^\infty(I)}(g).$$

□

3.10. Следствие. *Пусть* $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, $\rho, v \in \mathfrak{M}^+(I)$, $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(I)$, $\frac{1}{\rho} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(I)$, $\|v\|_{L^1(I)} > 0$. *Пространство* $C_0^\infty(I)$ *плотно в* $W^1_{p,q}(I)$ *тогда и только тогда, когда* $h_a = h_b = \infty$.

Доказательство. Утверждение следует из следствий 3.2 и 3.9. □

Список литературы

[1] Р. Ойнаров, “Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 207–223.

[2] В.Д. Степанов, Трехвесовое неравенство. I. Препринт 2000/45. Хабаровск: Вычислительный Центр ДВО РАН, 2000, 43с.

[3] C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of operators.* Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1988.

[4] G. Leoni. *A first course in Sobolev spaces.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2009.

[5] R. Oinarov, "On weighted norm inequalities with three weights ", *J. London Math. Soc.*, **48** (1993), 103–116.

[6] D.V. Prokhorov, "On a weighted Sobolev space on real line", *Eurasian Math. J.*,**8**: 2 (2017) 22–30.

[7] D.V. Prokhorov, V.D. Stepanov, E.P. Ushakova, "On associate spaces of weighted Sobolev space on the real line", *Math. Nachr.*, **290** (2017), 890–912.

[8] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-HiII Book Company, New York, 1987.

Прохоров Д.В.

Некоторые свойства весового пространства Соболева $W^1_{p,q}(I)$
на вещественной прямой

Препринт 2018/230

Утвержден к печати Ученым советом
Вычислительного центра ДВО РАН 24.10.2018 г.

Лицензия ЛР № 040118 от 15.10.2000 г.
Подписано к печати 24.10.2018 г.
Формат 60×84 1/8
Усл. печ. л. 1,43. Уч.-изд. л. 0,94
Тираж 100 экз.

Издательство "Дальнаука"
690042, Владивосток, Радио, 7
Отпечатано Вычислительным центром ДВО РАН
с макета, подготовленного автором в системе LaTeX